ÜBER
DIEJENIGEN FLÄCHEN,
DIE
ÄQUIDISTANTE INFINITESIMALE BIEGUNGEN
GESTATTEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

VERFASST UND DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

KGL. BAYER. JULIUS MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT ZU WÜRZBURG

ZUR

ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VORGELEGT

AM 15. JUNI 1898

VON

ALWIN MEHLING
AUS KLEINBRACH.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

WÜRZBURG.
KGL. UNIVERSITÄTSDRUCKEREI VON H. STÜRTZ.
1899.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549807_0262

MEINEN

LIEBEN ELTERN

IN DANKBARKEIT

GEWIDMET.

Die nachfolgende Arbeit wurde auf Anregung meines hochverehrten Lehrers Herrn Professor Dr. A. Voss im Herbste 1897 von mir in Angriff genommen und im Laufe des Jahres 1898 vollendet.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet, Herrn Professor Dr. A. Voss für die mir bei der Bearbeitung in so bereitwilliger und liebenswürdiger Weise erteilten Ratschläge meinen besten Dank auszusprechen.

Über diejenigen Flächen, die äquidistante infinitesimale Biegungen gestatten.

Um das Problem der infinitesimalen Biegungen der Flächen zu behandeln, kann man von zwei verschiedenen Gesichtspunkten ausgehen. Man kann sich die Aufgabe stellen, sämtliche infinitesimalen Biegungen einer vorgegebenen Fläche zu bestimmen, man kann aber auch nach sämtlichen Flächen fragen, die eine vorgegebene Biegung gestatten. Die Lösung beider Aufgaben gelingt, wie übrigens im Folgenden gelegentlich gezeigt wird, vermittelst der gleichen Methoden, nur sind die in den betreffenden Differentialgleichungen vorkommenden bekannten und unbekannten Funktionen entsprechend anders zu deuten.

Hier soll nun ein besonders einfaches, noch nicht näher behandeltes Problem der letzten Art durchgeführt werden. Es sollen nämlich diejenigen Flächen bestimmt und untersucht werden, die so verbiegbar sind, dass jeder ihrer Punkte bei der Verbiegung um eine gleichgrosse infinitesimale Strecke verschoben wird.[1])

Was den Gang der Untersuchungen betrifft, so werden in Kapitel I die Gleichungen der Flächen auf verschiedene Arten abgeleitet, Kapitel II beschäftigt sich dann zunächst mit der näheren Untersuchung der Flächen, insbesondere werden diejenigen unter ihnen bestimmt, die zugleich andern ausgezeichneten Flächenfamilien angehören. Weiter wird dort der Vorgang der Verbiegung, insbesondere an den reellen Flächen, näher charakterisiert. Im Anschluss daran bringt Kapitel III einige Beispiele, die, an sich interessant, auch geeignet sind, die in Kapitel II allgemein begründete Theorie zu erläutern und zu bestätigen.

[1]) Vergl. A. Voss, Zur Theorie der infinitesimalen Biegungsdeformationen einer Fläche. § VII (Sitzungsberichte der math.-phys. Klasse der k. b. Akad. d. Wiss. Bd. XXVII, 1897, Heft III.)

Kapitel I.

Ableitung der Gleichungen der äquidistant verbiegbaren Flächen.

§ 1. Erste Ableitung.

Zur Herleitung der Gleichungen unserer Flächen kann man sich eines Verfahrens bedienen, das sich aus einer von Herrn Weingarten[1]) zur Bestimmung der infinitesimalen Biegungen einer Fläche angegebenen Methode ergibt. Zur besseren Orientierung sei dieselbe kurz abgeleitet und zwar in der Weise, dass die sich schliesslich ergebende Differentialgleichung in ihrer Eigenschaft als Integrabilitätsbedingung eines simultanen Systems besonders hervortritt.

Die ursprünglich gegebene Fläche F habe die Koordinaten x_i $(i = 1, 2, 3)$, die wir uns als Funktionen zweier unabhängiger Veränderlichen u und v vorstellen. Die unendlich kleinen Zuwachse, welche die Koordinaten bei der Biegung erleiden, seien bezeichnet mit $\varepsilon\varphi_i$, wo ε eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung bedeutet. Die Koordinaten der verbogenen Fläche sind dann

$$\bar{x}_i = x_i + \varepsilon \varphi_i$$

und aus der Gleichung

$$\Sigma d\bar{x}_i^2 = \Sigma dx_i^2,$$ [2])

[1]) Weingarten, Über die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche. (Crelle Journal Bd. 100, p. 296.)

[2]) Im Folgenden ist der Kürze halber der Summationsindex: i weggelassen. Alle vorkommenden Summenzeichen bedeuten eine Summation über i = 1, 2, 3, so dass also:
$\Sigma dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$, $\Sigma d\varphi\, dx = d\varphi_1\, dx_1 + d\varphi_2\, dx_2 + d\varphi_3\, dx_3$ etc.

die für zwei Flächen F und $\overline{F}$ besteht, von denen die eine eine Biegung der andern, folgt unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen von der zweiten Ordnung

$$1) \qquad \Sigma \, d\varphi \, dx = 0$$

d. h. wenn wir die φ_i als die Koordinaten einer neuen Fläche φ betrachten, so stehen die Linienelemente der ursprünglichen Fläche F auf den entsprechenden Linienelementen von φ senkrecht. Die Frage nach den unendlich kleinen Biegungen einer Fläche F ist daher identisch mit der Aufgabe: die Flächen φ zu bestimmen, die der gegebenen durch Orthogonalität der Elemente entsprechen können[1]).

Ist nun umgekehrt die Art der auszuführenden Biegung gegeben, d. h. die φ_i als Funktionen von u und v und damit die Componenten $\varepsilon\varphi_i$ der Verschiebungen der einzelnen Punkte der (noch unbestimmten) Fläche F bei der Verbiegung, so bestimmen sich die Flächen F, bei denen eine derartige Biegung möglich ist, wieder als diejenigen, welche der Fläche φ durch Orthogonalität der Elemente entsprechen. Es folgt nämlich, wie vorhin, aus der Bedingung, dass die Entfernung irgend zweier unendlich benachbarter Punkte der Fläche F bis auf unendlich kleine Grössen zweiter und höherer Ordnung der Entfernung der entsprechenden Punkte auf der Fläche $F + \varepsilon\varphi$ gleich werde, wieder die Gleichung 1), in der nur jetzt die φ bekannt und die x unbekannt sind.

Wir haben also die Gleichung 1) zu behandeln und wollen in derselben entsprechend der letzten Auseinandersetzung die φ_i als gegeben betrachten. Führen wir die Derivationen aus, so treten an die Stelle der obigen Gleichung 1), da sie für jeden Wert von u und v gelten soll, die drei Gleichungen:

$$2) \qquad \begin{array}{l} a)\ \Sigma \varphi_u x_u = 0, \quad b)\ \Sigma \varphi_v x_v = 0, \quad [2]) \\ c)\ \Sigma (\varphi_u x_v + \varphi_v x_u) = 0. \end{array}$$

Um dieses System von drei Differentialgleichungen mit drei unbekannten Funktionen x_i (i = 1, 2, 3) zu lösen, verfahren wir folgendermassen: Wir leiten aus den drei Gleichungen durch Einführung einer neuen Funktion ψ und durch Derivieren der vorhandenen Gleichungen im ganzen sechs Gleichungen ab, drei, welche

---

1) Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie Kap. XI (Übers. von Lukat p. 287).

2) x_u bedeutet $\frac{\partial x}{\partial u}$, entsprechend x_v, $\varphi_u \ldots$

linear in den x_{iu} und drei, die linear in den x_{iv} sind. Diese sechs Gleichungen betrachten wir nun als ursprünglich gegeben und stellen die drei Integrabilitätsbedingungen auf, denen sie genügen müssen, wenn die x_i aus ihnen bestimmbar sein sollen. Wie wir sehen werden, dient die eine Bedingung zur Bestimmung der Funktion ψ, während die beiden andern sich auf Identitäten reduzieren.

Wir setzen zunächst:

3 a) $$\Sigma \varphi_u x_v = \psi \sqrt{H'},$$

wo ψ eine zu bestimmende Funktion von u und v (die charakteristische[1]) Funktion der Deformation der Fläche φ) ist und $H' = e' g' - f'^2$;[2]) dann folgt aus 2 c)

3 b) $$\Sigma \varphi_v x_u = - \psi \sqrt{H'}.$$

Durch Derivieren der Gleichungen 2 a), 2 b), 3 a) und 3 b) nach u resp. v, je nachdem die x_v oder x_u in denselben vorkommen, erhalten wir unter Berücksichtigung von

I) $$\Sigma \varphi_u x_{uv} = \Sigma \varphi_u x_{vu} \text{ und}$$

II) $$\Sigma \varphi_v x_{uv} = \Sigma \varphi_v x_{vu}$$

die beiden Relationen:

$$\Sigma \varphi_{uu} x_v - \Sigma \varphi_{uv} x_u = \frac{\partial}{\partial u} (\psi \sqrt{H'})$$

$$\Sigma \varphi_{vv} x_u - \Sigma \varphi_{uv} x_v = - \frac{\partial}{\partial v} (\psi \sqrt{H'}).$$

Beachten wir die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie in Bezug auf die Fläche φ, so finden wir

$$E' \Sigma p' x_v - F' \Sigma p' x_u = \sqrt{H'} \psi_u$$

$$F' \Sigma p' x_v - G' \Sigma p' x_u = \sqrt{H'} \psi_v$$

---

[1]) Bianchi a. a. O., § 154 p. 289.

[2]) Die gestrichenen Grössen beziehen sich auf die Fläche φ. — Wir bezeichnen nach Herrn Voss mit e, f, g die Fundamentalgrössen erster Ordnung, mit E, F, G die zweiter Ordnung, mit p_1, p_2, p_3 die Richtungscosinus der Flächennormalen. Alsdann bestehen die Gleichungen:

$$x_{uu} = A x_u + A_1 x_v + E p$$
$$x_{uv} = B x_u + B_1 x_v + F p$$
$$x_{vv} = C x_u + C_1 x_v + G p$$
$$p_u = H x_u + H_1 x_v$$
$$p_v = I x_u + I_1 x_v ,$$

aus denen die Bedeutung der A, A_1 . . . ersichtlich ist.

und hieraus folgt, wenn wir den Fall, wo $E' G' - F'^2 = 0$ d. h. wo die Fläche φ abwickelbar, ausschliessen,

4 a) $$\Sigma p' x_u = \frac{\sqrt{H'}}{E' G' - F'^2} (F' \psi_u - E' \psi_v)$$

4 b) $$\Sigma p' x_v = \frac{\sqrt{H'}}{E' G' - F'^2} (G' \psi_u - F' \psi_v).$$

Die sechs Gleichungen 2 a), 2 b); 3 a), 3 b) und 4 a), 4 b) bilden das gesuchte System.

Differentieren wir, um die Integrabilitätsbedingungen dieses Systems zu erhalten, diese Gleichungen nach v resp. u, so bekommen wir unter Berücksichtigung der Fundamentalgleichungen der Flächentheorie aus den Gleichungen a):

$$\Sigma \varphi_u x_{uv} = B_1' \psi \sqrt{H'} - F' \frac{F' \psi_u - E' \psi_v}{K' \sqrt{H'}}$$

$$\Sigma \varphi_v x_{uv} = C_1' \psi \sqrt{H'} - G' \frac{F' \psi_u - E' \psi_v}{K' \sqrt{H'}} - \frac{\partial (\psi \sqrt{H'}}{\partial v}$$

$$\Sigma p' x_{uv} = I_1' \psi \sqrt{H'} + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{F' \psi_u - E' \psi_v}{K' \sqrt{H'}} \right]$$

und aus den Gleichungen b):

$$\Sigma \varphi_u x_{vu} = - A' \psi \sqrt{H'} - E' \frac{G' \psi_u - F' \psi_v}{K' \sqrt{H'}} + \frac{\partial (\psi \sqrt{H'})}{\partial u}$$

$$\Sigma \varphi_v x_{vu} = - B' \psi \sqrt{H'} - F' \frac{G' \psi_u - F' \psi_v}{K' \sqrt{H'}}$$

$$\Sigma p' x_{vu} = - H' \psi \sqrt{H'} + \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{G' \psi_u - F' \psi_v}{K' \sqrt{H'}} \right].$$

Die drei Bedingungen der Integrabilität sind dann, da $(\varphi_u \varphi_v p') \neq 0$, enthalten in:

I) $$\Sigma (x_{uv} - x_{vu}) \varphi_u = 0$$

II) $$\Sigma (x_{uv} - x_{vu}) \varphi_v = 0$$

III) $$\Sigma (x_{uv} - x_{vu}) p' = 0.$$

Nun sind aber die beiden ersten Gleichungen identisch mit I) und II) p. 10 und werden also zu Identitäten führen, während die dritte Gleichung die gesuchte Differentialgleichung für ψ ergibt.

Es wird nämlich:

$$\text{I)}\ (B_1' + A')\,\psi\sqrt{H'} + (E'G' - F'^2)\frac{\psi_u}{K'\sqrt{H'}} - \frac{\partial(\psi\sqrt{H'})}{\partial u} = 0$$

und diese Gleichung ist identisch erfüllt[1]).

$$\text{II)}\quad (C_1' + B')\,\psi\sqrt{H'} + (E'G' - F'^2)\frac{\psi_v}{K'\sqrt{H'}} - \frac{\partial(\psi\sqrt{H'})}{\partial v} = 0,$$

welche Gleichung wieder identisch erfüllt ist.

$$\text{III)}\qquad (I_1' + H')\,\psi\sqrt{H'} + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{F'\psi_u - E'\psi_v}{K'\sqrt{H'}}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{G'\psi_u - F'\psi_v}{K'\sqrt{H'}}\right] = 0$$

und hieraus folgt:

$$\text{5)}\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{G'\psi_u - F'\psi_v}{K'\sqrt{H'}}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E'\psi_v - F'\psi_u}{K'\sqrt{H'}}\right] = \psi\,\frac{2f'F' - E'g' - G'e'}{\sqrt{H'}}.$$

Wir erkennen also bei dieser Formulierung der Ableitung, dass die Differentialgleichung 5) die einzige notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität des aus den Gleichungen 2) abgeleiteten Systems ist.

Aus den Gleichungen a) bekommen wir:

$$\text{6 a)}\ x_{iu} = \frac{1}{K'\sqrt{H'}}\left[E'(\psi\,p'_{iv} - p'_i\,\psi_v) - F'(\psi\,p'_{iu} - p'_i\,\psi_u)\right].$$

Nun werden die Gleichungen b), aus den Gleichungen a) durch Vertauschung der Indices u und v und der Fundamentalgrössen E und G unter gleichzeitiger Aenderung des Vorzeichens der Unbekannten erhalten, also werden die x_{iv} aus den x_{iu} durch die gleichen Veränderungen gewonnen, so dass sich ergibt:

---

[1]) Voss, Infinitesimale Biegungen p. 232 (2).

6 b) $$x_{i\,v} = \frac{1}{K' \sqrt{H'}} \left[F' (\psi\, p'_{i\,v} - p'_i\, \psi_v) - G' (\psi\, p'_{i\,u} - p'_i\, \psi_u) \right].$$

Hieraus folgen dann schliesslich die Gleichungen der Fläche, die der gegebenen durch Orthogonalität der Elemente entspricht, zu:

$$x_i = \int \left(x_{i\,u}\, d\,u + x_{i\,v}\, d\,v \right).$$

Diese allgemeinen Betrachtungen sollen nun zur Lösung unseres speciellen Problemes verwendet werden.

Die Strecke, um die ein Punkt der gesuchten Fläche F bei der Verbiegung verschoben wird, ist

$$\varepsilon \sqrt{\varphi_1^{\,2} + \varphi_2^{\,2} + \varphi_3^{\,2}}. \quad ^{1})$$

Wenn also jeder Punkt um das gleiche Stück verschoben werden soll, so müssen die Verschiebungskomponenten der Bedingung genügen:

$$\varphi_1^{\,2} + \varphi_2^{\,2} + \varphi_3^{\,2} = \text{const.}$$

d. h. die Fläche φ muss eine Kugel sein. Wir setzen, ohne die Allgemeinheit zu verletzen, die Konstante gleich 1 voraus und haben also:

$$\varphi_1^{\,2} + \varphi_2^{\,2} + \varphi_3^{\,2} = 1.$$

In unseren allgemeinen Formeln ist aber die Fläche φ in der Gauss'schen Darstellungsweise vorausgesetzt. Wir wollen dieselbe auf ihre Minimallinien beziehen und erhalten dann:

7) $$\varphi_1 = \frac{u + v}{1 + u\,v},\ \varphi_2 = i\,\frac{v - u}{1 + u\,v},\ \varphi_3 = \frac{u\,v - 1}{1 + u\,v}.$$

Die Fundamentalgrössen werden:

8) $$e' = g' = 0,\ f' = \frac{2}{(1 + u\,v)^2};\ H' = -\frac{4}{(1 + u\,v)^4}$$

9) $$E' = G' = 0,\ F' = -\frac{2}{(1 + u\,v)^2};\ K' = 1,$$

1) Da der Wurzel (oder auch der Konstanten ε) positives und negatives Vorzeichen beigelegt werden kann, so sehen wir, dass die Verschiebung in zwei entgegengesetzten Richtungen stattfinden kann und also bei jeder äquidistant verbiegbaren Fläche mindestens zwei solche Verbiegungen möglich sind.

so dass die Gleichungen 6a) und 6b) p. 12 und 13 hier die Gestalt annehmen:

10 a) $$x_{i\,u} = -\sqrt{-1}\left[\psi\,\varphi_{i\,u} - \psi_u\,\varphi_i\right]$$

10 b) $$x_{i\,v} = +\sqrt{-1}\left[\psi\,\varphi_{i\,v} - \psi_v\,\varphi_i\right].$$

Die Differentialgleichung 5) p. 12 für ψ wird hier:

11) $$\psi_{u\,v} + \frac{2}{(1+u\,v)^2}\,\psi = 0. \quad ^{1})$$

Bilden wir die Ableitung nach v, so folgt:

$$\psi_{u\,v\,v} + \frac{2}{(1+u\,v)^2}\,\psi_v - \frac{4\,u}{(1+u\,v)^3}\,\psi = 0$$

und, indem wir die obige Gleichung berücksichtigen:

$$\psi_{u\,v\,v} + \frac{2}{(1+u\,v)^2}\,\psi_v + \frac{2\,u}{1+u\,v}\,\psi_{u\,v} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich aber schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left[\psi_{v\,v} + \frac{2\,u}{1+u\,v}\,\psi_v\right] = 0.$$

Hieraus folgt:

$$(\psi_v)_v + \frac{2\,u}{1+u\,v}(\psi_v) = i\,g''' \quad ^{2}),$$

wo g''' die dritte Derivierte einer beliebigen Funktion von v. Da hier nur Derivationen nach v vorkommen, so kann die Gleichung wie eine gewöhnliche Differentialgleichung behandelt werden. Wir erhalten:

$$\psi_v = \frac{1}{(1+u\,v)^2}\left[i\int g'''\,(1+u\,v)^2\,dv + 2\,i\,f\right],$$

---

1) Die φ_i sind partikuläre Lösungen dieser Gleichung. — Die allgemeine Gleichung von der obigen Gestalt wurde (nach Darboux) behandelt von Moutard, Sur la construction des équations de la forme $\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \lambda(x,y)$, qui admettent une intégrale générale explicite (Journal de l'École Polytechnique, XLV^e Cahier, p. I, 1878).

2) Wir schreiben die willkürliche Funktion in dieser Form, um im Resultate Übereinstimmung mit späteren Formeln zu erhalten.

wo f ein beliebige Funktion von u. Durch weitere Integration folgt schliesslich:

$$\psi = i\,g' - i\,g\,\frac{2\,u}{1+u\,v} - i\,f\,\frac{2}{(1+u\,v)\,u} + \Phi(u).$$

In diesem Ausdruck haben wir nun nicht das Integral der ursprünglich gegebenen Gleichung, sondern das der nach v derivierten. Die beliebige Funktion Φ von u ist also so zu bestimmen, dass die ursprünglich gegebene Differentialgleichung erfüllt ist. Es ergibt sich:

$$\Phi(u) = i\,\frac{4\,f - 2\,u\,f'}{2\,u}$$

und schliesslich

12) $$\psi = i\left[\frac{(1+u\,v)(g'-f') + 2\,(v\,f - u\,g)}{1+u\,v}\right].$$

Denken wir uns diese Werte von φ_i, ψ und die hieraus folgenden von $\varphi_{i\,u}$, $\varphi_{i\,v}$, ψ_u und ψ_v in die Formeln eingesetzt, so sehen wir, dass sich die $x_{i\,v}$ aus den $x_{i\,u}$ einfach durch Vertauschung von u und v, f und g ergeben. Nur im Falle i = 2 ist dem so erhaltenen Ausdruck ein Minuszeichen vorzusetzen, um den Wert von $x_{2\,v}$ zu bekommen.

Es kommt schliesslich nach Formel 10a) p. 14

$$x_{1\,u} = \frac{\partial}{\partial\,u}\left[(g'+f')\,\frac{u+v}{1+u\,v} - 2\,\frac{f+g}{1+u\,v}\right].$$

Zu dieser Umformung gelangen wir, indem wir beachten, dass zu $(g'-f')\,\frac{1-v^2}{(1+uv)^2}$ noch $2\,f'\,\frac{1-v^2}{(1+uv)^2}$ zu addiren ist, um in Verbindung mit $f''\,\frac{u+v}{1+uv}$ die Derivierte von $(g'+f')\,\frac{u+v}{1+uv}$ nach u zu erhalten. Das Weitere folgt dann leicht. Nach obiger Regel wird nun:

$$x_{1\,v} = \frac{\partial}{\partial\,v}\left[(g'+f')\,\frac{u+v}{1+u\,v} - 2\,\frac{f+g}{1+u\,v}\right].$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich die Werte für $x_{2\,u}$, $x_{3\,u}$ und hieraus die für $x_{2\,v}$ und $x_{2\,v}$. Schliesslich bekommen wir:

$$x_1 = -\frac{(u+v)(f'+g') - 2(f+g)}{1+uv}$$

13) $$x_2 = i\frac{(v-u)(f'+g') - 2(g-f)}{1+uv}$$

$$x_3 = \frac{(uv-1)(f'+g') - 2(vf+ug)}{1+uv}$$ [1])

als Gleichungen aller äquidistant verbiegbaren Flächen.

Die drei partiellen Differentialgleichungen 2a), 2b) und 2c) p. 9, deren Lösung für unsern speziellen Fall wir soeben auf dem durch die allgemeine Methode vorgeschriebenen Wege erhalten haben, gestatten jedoch hier eine direkte, weit einfachere Behandlung.

Die Gleichungen 2a) und 2b) werden nämlich:

$$(1-v^2)x_{1\,u} - i(1+v^2)x_{2\,u} + 2v\,x_{3\,u} = 0$$
$$(1-u^2)x_{1\,v} + i(1+u^2)x_{2\,v} + 2u\,x_{3\,v} = 0$$

und diese Gleichungen sind direkt integrierbar [2]), weil die Koeffizienten nur von v resp. u abhängen.

Wir erhalten

14a) $$(1-v^2)x_1 - i(1+v^2)x_2 + 2v\,x_3 = -4g$$
14b) $$(1-u^2)x_1 + i(1+u^2)x_2 + 2u\,x_3 = -4f.$$

Die Gleichung 2c) p. 9 lässt sich schreiben:

$$\Sigma\varphi_{u\,v}x = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left[\Sigma\varphi_v x\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left[\Sigma\varphi_u x\right].$$

Weil aber nach Obigem hier

$$\Sigma\varphi_v x = -\frac{4f}{(1+uv)^2} \text{ und } \Sigma\varphi_u x = -\frac{4g}{(1+uv)^2},$$

so giebt dies die Gleichung:

14c) $$(u+v)x_1 + i(v-u)x_2 + (uv-1)x_3 = (1+uv)(f'+g') - 2(vf+ug).$$

Aus diesen drei, in den x_i linearen Gleichungen berechnen sich dieselben Werte für die x_i wie oben.

Diese Gleichungen 14), die wir bei Darboux [3]) aus geometrischen,

---

[1]) Darboux, Theorie générale des surfaces t. IV. p. 15 und 17.

[2]) Caronnet. Sur des couples de surfaces applicables (Bulletin de la Société Mathematique t. XXI, No. 8, p. 134).

[3]) Darboux a. a. O. t IV, p. 17

sich vermittelst der Theorie der isotropen Kongruenzen [1]) ergebenden Eigenschaften unserer Fläche abgeleitet finden, lassen umgekehrt eine geometrische Deutung zu, deren Konsequenzen hier im einzelnen verfolgt werden sollen.

Jede der beiden Ebenen, 14a) und 14b) ist bei beliebigem u und v Berührungsebene des unendlich fernen, imaginären Kugelkreises, denn die Koëffizienten der x, welche den Koordinaten des Berührungspunktes proportional sind, genügen der Gleichung

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Umhüllungsfläche jeder der beiden Ebenenscharen den Kugelkreis enthält und also die Tangenten der Rückkehrkante dieser Umhüllungsfläche denselben treffen. Diese Rückkehrkante ist also eine Minimallinie. Die Gleichungen der beiden sich so ergebenden Minimallinien, deren Oskulationsebenen also die Ebenen 14a) und 14b) sind, werden

15 a)
$$\begin{aligned} y_1 &= (1 - u^2)\,f'' + 2\,u\,f' - 2\,f \\ y_2 &= i\,(1 + u^2)\,f'' - 2\,i\,u\,f' + 2\,i\,f \\ y_3 &= 2\,u\,f'' - 2\,f', \end{aligned}$$

15 b)
$$\begin{aligned} z_1 &= (1 - v^2)\,g'' + 2\,v\,g' - 2\,g \\ z_2 &= -\,i\,(1 + v^2)\,g'' + 2\,i\,v\,g' - 2\,i\,g \\ z_3 &= 2\,v\,g'' - 2\,g'. \end{aligned}$$

Verbinden wir immer einen Punkt der einen Kurve mit einem der anderen, so beschreibt die Mitte der Verbindungsgeraden die allgemeine Minimalfläche, deren Tangentialebene durch die Gleichung 14c) dargestellt wird. Die Punkte unserer äquidistant verbiegbaren Fläche werden dann als die Schnittpunkte der Oskulationsebenen 14a) und 14b) der beiden Minimallinien 15a) und 15b) mit der jeweils zugehörigen Tangentialebene 14c) der Minimalfläche erhalten.

Durch diese Konstruktion werden also die äquidistant verbiegbaren Flächen in gewisser Weise den Minimalflächen zugeordnet. Es ist jedoch zu beachten, dass ein und derselben Minimalfläche mehrere äquidistant verbiegbare Flächen entsprechen; denn alle Paare von Minimallinien, die aus den ursprünglich zugrunde gelegten 15a) und 15b) dadurch erhalten werden, dass wir die eine in einer beliebigen Richtung, die andere in der entgegenge-

[1]) Unsere allgemeine Fläche ist nämlich identisch mit der Mittelfläche der allgemeinen isotropen Kongruenz.

setzten um das gleiche Stück parallel zu sich verschieben, geben ein und dieselbe Minimalfläche. Die äquidistant verbiegbare Fläche aber wird durch Zugrundelegung der neuen Minimallinien eine andere, weil mit den Minimallinien auch deren Oskulationsebenen verschoben werden und so deren Schnittpunkt mit der betreffenden Tangentialebene ein anderer wird.

Dies wollen wir an den Gleichungen verfolgen. Die Minimallinien 15a) und 15b) sind bis auf eine Parallelverschiebung durch die bis auf Funktionen zweiten Grades

$$[f] = + \frac{c_1 i - C_1}{4}(1-u^2) + \frac{c_2 i - C_2}{4} i(1+u^2) + \frac{c_3 i - C_3}{2} u \quad ^1)$$

$$[g] = - \frac{c_1 i + C_1}{4}(1-v^2) + \frac{c_2 i + C_2}{4} i(1+v^2) - \frac{c_3 i + C_3}{2} v$$

festgelegten f und g bestimmt: denn setzen wir an Stelle von f und g : f + [f] und g + [g] in die rechten Seiten der Gleichungen 15a) und 15b) ein, so treten zu 15a) nur die Konstanten

$$- c_1 i + C_1 , \quad - c_2 i + C_2 , \quad - c_3 i + C_3$$

und zu 15 b) die Konstanten

$$c_1 i + C_1 , \quad c_2 i + C_2 , \quad c_3 i + C_3$$

hinzu. Die rechten Seiten der Gleichungen der Minimalflächen:

$$\xi_i = \frac{y_i + z_i}{2} + C_i$$

erhalten dagegen nur die additiven Konstanten C.

Die Konstanten c bewirken also die Verschiebung der Minimallinien, durch welche die Minimalfläche ungeändert bleibt, während durch die Konstanten C, durch deren Hinzufügen die beiden Minimallinien ohne Änderung ihrer gegenseitigen Lage parallel verschoben werden, auch die Minimalfläche eine solche Parallelverschiebung erleidet.

Setze ich nun f + [f] und g + [g] an Stelle von f und g in die Gleichungen 13) ein, so ergeben sich die zu obiger Minimalfläche gehörigen äquidistant verbiegbaren Flächen zu:

$$x_1 = \frac{(u+v)(f'+g') - 2(f+g)}{1+uv} - c_2 \frac{uv-1}{1+uv} + c_3 \frac{i(v-u)}{1+uv} + C_1$$

---

[1]) In dieser Form werden die Funktionen am zweckmässigsten geschrieben. Vergl. Gl. 1) und 3) p. 50 und 14 p. 26.

$$x_2 = i\,\frac{(v-u)(f'+g') - 2(g-f)}{1+uv} - c_3\,\frac{u+v}{1+uv} + c_1\,\frac{uv-1}{1+uv} + C_2$$

$$x_3 = \frac{(uv-1)(f'+g') - 2(vf+ug)}{1+uv} - c_1\,\frac{i(v-u)}{1+uv} + c_2\,\frac{u+v}{1+uv} + C_3\,.$$

Diese werden also durch die von den C_i abhängige Verschiebung der Minimallinien auch nur parallel verschoben, wie es sein muss, während die von den c_i abhängigen Verschiebung der Minimallinien, welche die Minimalfläche ungeändert lässt, im allgemeinen eine Gestaltsänderung von F hervorbringt.

Vergleichen wir Kapitel III § 1 (p. 50 ff.), so haben wir den Satz:

Alle nach obiger Konstruktion zu einer bestimmten Minimalfläche gehörigen äquidistant verbiegbaren Flächen werden dadurch erhalten, dass zu den Koordinaten einer der Flächen die Koordinaten einer Ebene addiert werden.

An die Gleichungen 14) knüpfen sich noch weitere Bemerkungen.

Die Ebenen 14a) und 14b) denen die Koordinaten unserer Fläche genügen, sind fest für $v = \text{const}$ resp. $u = \text{const}$, woraus wir erkennen, dass unsere Koordinatenlinien eben sind.

Die Schnittlinie der Ebenen 14a) und 14a), d. h. also die Schnittlinie der Ebenen, in denen die den Punkt bestimmenden Koordinatenkurven liegen, ist gerade die Verschiebungsrichtung des betreffenden Punktes bei der äquidistanten Verbiegung. Sind nämlich x_i^0 die Koordinaten eines Flächenpunktes, so hat die Verschiebungsrichtung die Gleichungen

$$x_i = x_i^0 + \lambda\,\varphi_i$$

und diese Werte von x_i erfüllen die Gleichungen 14a) und 14b), weil

$(1-v^2)\,\varphi_1 - i(1+v^2)\,\varphi_2 + 2v\,\varphi_3 \equiv (1+uv)^2\,\Sigma\varphi_v\,\varphi = 0$ und
$(1-u^2)\,\varphi_1 + i(1+u^2)\,\varphi_2 + 2u\,\varphi_3 \equiv (1+uv)^2\,\Sigma\varphi_u\,\varphi = 0.$

Weiter erkennen wir, dass die Verschiebungsrichtung eines Punktes senkrecht steht auf der Tangentialebene 14c), die in dem entsprechenden Punkte an die Minimalfläche gelegt ist.

§ 2. Zweite Ableitung.

Um weitere Beziehungen unserer Flächen zu anderen Flächenfamilien zu erkennen, sollen ihre Gleichungen noch nach einer zweiten von Herrn Voss gegebenen Methode[1]) abgeleitet werden. Diese Methode sei vorerst in Kürze erläutert.

Sind p_i die Normalencosinus einer Fläche F mit den Koordinaten x_i, so bestehen die Gleichungen:

$$1)\qquad \begin{aligned} \Sigma p\, x_u &= 0, & \Sigma p\, x_v &= 0 \\ \Sigma p_u\, x_u &= -E, & \Sigma p_u\, x_v &= -F \\ \Sigma p_v\, x_u &= -F, & \Sigma p_v\, x_v &= -G. \end{aligned}$$

Da $(p\ p_u\ p_v) = \dfrac{EG - F^2}{\sqrt{H}}$, so folgen, wenn wir noch setzen

$$2)\qquad \begin{aligned} D' &= -\frac{\sqrt{H}}{EG - F^2}\, E \\ D'_1 &= -\frac{\sqrt{H}}{EG - F^2}\, F \\ D'_{11} &= -\frac{\sqrt{H}}{EG - F^2}\, G, \end{aligned}$$

für die x_{iu}, x_{iv} Ausdrücke, die sich in die Identitäten zusammenfassen lassen:

$$\begin{aligned} \Sigma a\, x_u &= (a\, p\, p_u)\, D'_1 - (a\, p\, p_v)\, D' \\ \Sigma a\, x_v &= (a\, p\, p_u)\, D'_{11} - (a\, p\, p_v)\, D'_1. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen ändern sich nicht, wenn wir an Stelle von

$$D',\ D'_1,\ D'_{11},\ p$$

der Reihe nach setzen

$$D\, r^2,\ D_1\, r^2,\ D_{11}\, r^2,\ \frac{\Theta}{r},$$

so dass wir also allgemein schreiben können:

$$3)\qquad \begin{aligned} \Sigma a\, x_u &= (a\, \Theta\, \Theta_u)\, D_1 - (a\, \Theta\, \Theta_v)\, D \\ \Sigma a\, x_v &= (a\, \Theta\, \Theta_u)\, D_{11} - (a\, \Theta\, \Theta_v)\, D_1 . \end{aligned}$$

Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung von F lassen sich

[1]) A. Voss, Infinitesimale Biegungen.

unmittelbar durch die D und Θ ausdrücken. Weil $\Theta = r \cdot p$, so bestehen die Gleichungen:

$$\Sigma \Theta x_u = 0, \quad \Sigma \Theta x_v = 0, \quad r^2 = \Sigma \Theta^2$$

und daher folgen durch Multiplikation der Gleichungen

$$x_{uu} = A x_u + A_1 x_v + E \frac{\Theta}{r} \text{ [1]}$$

mit Θ_1, Θ_2, Θ_3 und Addition die Formeln:

$$4) \qquad E = -\frac{\Delta}{r} D, \; F = -\frac{\Delta}{r} D_1, \; G = -\frac{\Delta}{r} D_{11},$$

wenn

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Theta_{1u} & \Theta_{2u} & \Theta_{3u} \\ \Theta_{1v} & \Theta_{2v} & \Theta_{3v} \\ \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \end{vmatrix}$$

Damit nun die aus den Identitäten 3) folgenden sechs Gleichungen rückwärts integrierbar sind, müssen die Relation

$$\Theta_2 \frac{\partial}{\partial v}\left[D_1 \Theta_{3u} - D \Theta_{3v}\right] - \Theta_3 \frac{\partial}{\partial v}\left[D_1 \Theta_{2u} - D \Theta_{2v}\right]$$
$$= \Theta_2 \frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11} \Theta_{3u} - D_1 \Theta_{3v}\right] - \Theta_3 \frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11} \Theta_{2u} - D_1 \Theta_{2v}\right]$$

und die aus dieser durch cyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 der Θ sich ergebenden anderen Relationen erfüllt sein. Diese drei Gleichungen lassen sich aber in der Form schreiben:

$$\frac{1}{\Theta_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11} \Theta_{3u} - D_1 \Theta_{3v}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[D \Theta_{3v} - D_1 \Theta_{3u}\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{\Theta_2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11} \Theta_{2u} - D_1 \Theta_{2v}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[D \Theta_{2v} - D_1 \Theta_{2u}\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{\Theta_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11} \Theta_{1u} - D_1 \Theta_{1v}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[D \Theta_{1v} - D_1 \Theta_{1u}\right]\right\}$$

d. h. die drei Θ sind particuläre Lösungen der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$5) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11} \Theta_u - D_1 \Theta_v\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[D \Theta_v - D_1 \Theta_u\right] = M \Theta,$$

wo M eine von r und den Fundamentalgrössen von F abhängige Funktion ist, die entweder durch passende Wahl von r oder, wenn r vorgegeben, durch entsprechende Wahl der Fläche F zu Null gemacht werden kann [2]). Wir setzen also M gleich Null

[1]) Fussnote p. 10.

[2]) Voss, Infinitesimale Biegungen § II.

voraus, dann sind die Koordinaten der Fläche in der Form darstellbar:

I) $\Sigma a\,x = \int (a\,\Theta\,\Theta_u)\,(D_1\,d\,u + D_{11}\,d\,v) - \int (a\,\Theta\,\Theta_v)\,(D\,d\,u + D_1\,d_v)$,

wo die drei Θ particuläre Integrale der Differentialgleichung

II) $$\frac{\partial}{\partial u}\left[D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[D\,\Theta_v - D_1\,\Theta_u\right] = 0$$

sind.

Es können nun die Θ_i, die dieser Gleichung II) genügen, als Koordinaten einer neuen Fläche betrachtet werden, deren Radius vektor r ist und die in einer eigentümlichen Beziehung zu F steht. Herr Voss nennt F zu Θ adjungiert.

Wir brauchen für unsern Zweck nur den speziellen Fall zu untersuchen, wo r = 1 d. h. wo die Fläche Θ eine Kugel ist; dann gehen die Θ_i in die p_i über und wir erhalten durch Multiplizieren der drei Gleichungen 5) mit p_1, p_2, p_3 und Addieren

$$M = D_{11}\,\Sigma p\,p_{u\,u} - 2\,D_1\,\Sigma p\,p_{u\,v} + D\,\Sigma p\,p_{v\,v}$$

oder

$$M = (G\,e - 2\,F\,f + E\,g)\,K\,.$$

Damit also M = 0 werde, muss

$$G\,e - 2\,F\,f + E\,.\,g = 0 \text{ sein.}$$

Die zur Kugel adjungierten Flächen sind daher die Minimalflächen.

Infolge von II) können wir weiter setzen:

6)
$$D_1\,\Theta_u - D\,\Theta_v = \varphi_u$$
$$D_{11}\,\Theta_u - D_1\,\Theta_v = \varphi_v\,,$$

wo die hieraus durch Integration folgenden φ_i als Koordinaten einer neuen Fläche φ aufgefasst werden sollen, die zu Θ associiert ist[1]).

Setzen wir ferner

$$D\,D_{11} - D_1^{\,2} = \Omega$$

und bezeichnen die durch Ω dividierten Grössen D, D_1, D_{11} mit d, d_1, d_{11}, so haben wir nach 6) die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial u}\,(d_{11}\,\varphi_u - d_1\,\varphi_v) + \frac{\partial}{\partial v}\,(d\,\varphi_v - d_1\,\varphi_u) = 0\,.$$

Es wird also durch die Identität

$$\Sigma b\,\xi = \int (b\,\varphi\,\varphi_u)\,(d_1\,d\,u + d_{11}\,d\,v) - \int (b\,\varphi\,\varphi_v)\,(d\,d\,u + d_1\,d\,v)$$

eine Fläche Φ dargestellt, die zu φ adjungiert ist.

[1]) Voss, Infinitesimale Bingungen § V, p. 246, 247.

Indem wir den eben gezeigten Weg rückwärts gehen, gelangen wir von φ und Φ wieder zu Θ und F zurück.

Um diese Auseinandersetzungen für das vorgelegte Problem verwerten zu können, haben wir die Beziehung zu beachten, die zwischen der Fläche φ und F besteht. Infolge der Gleichungen 6) werden die Identitäten 3):

3′) $$\Sigma a\, x_u = (a\, \Theta\, \varphi_u)$$
$$\Sigma a\, x_v = (a\, \Theta\, \varphi_v)$$

und hieraus folgt, wenn man den willkürlichen Grössen a geeignete Werte erteilt:

$$\Sigma x_u \varphi_u = 0\,, \qquad \Sigma x_v \varphi_v = 0\,,$$
$$\Sigma (x_u \varphi_v + x_v \varphi_u) = 0\,.$$

Durch Vergleichen mit 2a), 2b) und 2c) p. 9 erkennen wir, dass dies die Bedingungen sind, denen die φ zu genügen haben, wenn

$$\varepsilon \varphi_1\,, \quad \varepsilon \varphi_2\,, \quad \varepsilon \varphi_3$$

die Verschiebungskomponenten einer unendlich kleinen Biegung von F vorstellen.

Soll also die Fläche F die allgemeine äquidistant verbiegbare Fläche werden, so muss $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1$ sein, d. h. unsere Fläche φ muss eine Kugel werden. Dann ist aber nach p. 22 die Fläche Φ die allgemeine Minimalfläche, weil ja die Beziehung zwischen φ und Φ genau dieselbe, wie zwischen Θ und F.

Wir gehen umgekehrt von der allgemeinen Gleichung der Minimalflächen als der Fläche Φ aus, adjungieren dieselbe der Kugel und finden durch Bestimmung der zugehörigen Fläche F die allgemeine Gleichung der Flächen die eine äquidistante Biegung gestatten[1]).

Die allgemeine Minimalfläche hat, bezogen auf ihre Minimallinien nach Weierstrass die Gleichungen:

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\int (1-u^2)\, f'''\, du + \frac{1}{2}\int (1-v^2)\, g'''\, dv$$
$$= \frac{1}{2}(1-u^2) f'' + u f' - f + \frac{1}{2}(1-v^2) g'' + v g' - g$$

7) $$\xi_2 = \frac{i}{2}\int (1+u^2)\, f'''\, du - \frac{i}{2}\int (1+v^2)\, g'''\, dv$$
$$= i\left[\frac{1}{2}(1+u^2) f'' - u f' + f - \frac{1}{2}(1+v^2) g'' + v g' - g\right]$$
$$\xi_3 = \int u\, f'''\, du + \int v\, g'''\, dv = u f'' - f' + v g'' - g'\,,$$

[1]) A. Voss, Infinitesimale Biegungen § VII.

wo f und g willkürliche Funktionen von u resp. v bedeuten (die nicht mit den Fundamentalgrössen zu verwechseln sind). Wir erhalten also, da der Radius vektor von φ gleich 1 ist, nach Formeln, die den Gleichungen 2), p. 20 analog in Bezug auf die Fläche Φ gebildet sind,

$$\begin{aligned} d &= i\frac{(1+u\,v)^2}{2} f''' \\ d_1 &= 0 \\ d_{11} &= i\frac{(1+u\,v)^2}{2} g'''. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir weiter die zu Ω analoge Grösse mit ω, so folgt:

$$\omega = -\frac{f''' g'''}{4}(1+u\,v)^4$$

und also

8) $$D = \frac{2\,i}{g'''(1+u\,v)^2}, \quad D_1 = 0, \quad D_{11} = \frac{2\,i}{f'''(1+u\,v)^2}.$$

Die Koordinaten der Fläche φ erhalten wir hier durch Bestimmung der Normalencosinus der Fläche Φ zu

9) $$\varphi_1 = \frac{u+v}{1+u\,v}, \quad \varphi_2 = i\frac{v-u}{1+u\,v}, \quad \varphi_3 = \frac{u\,v-1}{1+u\,v}.$$

Für die Fläche Θ folgt dann nach Formeln, die den Gleichungen 6) analog sind

$$\begin{aligned} \Theta_{1u} &= i\frac{f'''}{2}(1-u^2), & \Theta_{1v} &= -i\frac{g'''}{2}(1-v^2) \\ \Theta_{2u} &= -\frac{f'''}{2}(1+u^2), & \Theta_{2v} &= -\frac{g'''}{2}(1+v^2) \\ \Theta_{3u} &= i\,f'''\,u, & \Theta_{3v} &= -i\,g'''\,v \end{aligned} \qquad 10)$$

und also

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{1}{2}\int(1-u^2)(i\,f''')\,du + \frac{1}{2}\int(1-v^2)(-i\,g''')\,dv \\ &= i\left[\frac{1}{2}(1-u^2)f'' + u\,f' - f - \frac{1}{2}(1-v^2)g'' - v\,g' - g\right] \\ \Theta_2 &= \frac{i}{2}\int(1+u^2)(i\,f''')\,du - \frac{i}{2}\int(1+v^2)(-i\,g''')\,dv \\ &= -\frac{1}{2}(1+u^2)f'' + u\,f' - f - \frac{1}{2}(1+v^2)g'' + v\,g' - g \\ \Theta_3 &= \int u\,(i\,f''')\,du + \int v\,(-i\,g''')\,dv \\ &= i\,[u\,f'' - f' - v\,g'' + g']. \end{aligned} \qquad 11)$$

Wir erkennen also, dass die Fläche Θ in unserem Falle wieder Minimalfläche und zwar die zu Φ adjungierte[1]) Minimalfläche ist.

Die Koordinaten der gesuchten Fläche F ergeben sich dann schliesslich aus der Identität:

$$12) \qquad \Sigma a x = \int \left\{ - (a\,\Theta\,\Theta_v)\, D\, d u + (a\,\Theta\,\Theta_u)\, D_{11}\, d v \right\},$$

wo für die Θ, Θ_u Θ_v und D die oben angegebenen Ausdrücke einzusetzen sind. Man erkennt unter Berücksichtigung von 8), 10) und 11), dass die beiden Bestandteile des Integrals einfach dadurch in einander übergehen, dass wir die Buchstaben u und v und die Funktionen f und g vertauschen und noch für a_2: — a_2 setzen. Es ist also zum Zwecke der Integration nur nötig dem einen Bestandteil des Integrals, etwa dem Koëffizienten von d u, die Form einer partiellen Derivierten zu geben; die entsprechende Form des anderen Bestandteils wird dann durch Anwendung obiger Regel erhalten:

Um die Rechnung durchzuführen, müssen wir die Identität 12) in die drei Gleichungen zerlegen, aus denen sie gebildet ist. Die Koëffizienten von d u in den drei Gleichungen d. h. die partiellen Derivierten der zu bildenden Funktion nach u haben die Form eines Bruches, dessen Nenner $(1 + u\,v)^2$ und dessen Zähler eine zweigliederige Determinante ist. Hieraus erkennen wir, dass die Integralfunktion die Form hat:

$$\frac{F(u, v)}{(1 + u\,v)}.$$

Die Derivierte dieser Funktion nach u wird:

$$\frac{1}{(1 + u\,v)^2} \begin{vmatrix} F_u & F \\ v & 1 + u\,v \end{vmatrix}.$$

Auf diese Form müssen wir unsere Koëffizienten von d u zu bringen suchen, um die Funktion F zu erkennen. Der betreffende Koëffizient der ersten Gleichung nimmt nach einigen Umformungen der Determinante (Multiplizieren mit — 2 i; Zerlegen von $1 + v^2$ in $(1 + u\,v) + v\,(v—u)$; Subtrahieren der mit (v—u) multiplizierten zweiten Kolonne von der ersten etc.) die Form an:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{1}{(1 + u\,v)^2} \begin{vmatrix} (u + v)\, f'' - f' + g' & (u + v)\,(f' + g') - 2\,(f + g) \\ v & 1 + u\,v \end{vmatrix}$$

und nach obiger Regel wird dann:

[1]) Stahl, Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie p. 73.

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{1}{(1+uv)^2}\begin{vmatrix} (u+v)g'' - g' + f' & (u+v)(f'+g') - 2(f+g) \\ u & 1+uv \end{vmatrix}.$$

Nachdem wir die Werte der anderen Derivierten $\frac{\partial x_2}{\partial u}$, $\frac{\partial x_3}{\partial u}$ ähnlich behandelt haben, erkennen wir schliesslich, dass die Fläche F die Gleichungen besitzt[1]):

$$13) \quad \begin{aligned} x_1 &= \frac{(u+v)(f'+g') - 2(f+g)}{(1+uv)} \\ x_2 &= i\frac{(v-u)(f'+g') - 2(g-f)}{(1+uv)} \\ x_3 &= \frac{(uv-1)(f'+g') - 2(vf+ug)}{(1+uv)}. \end{aligned}$$

Dies sind die allgemeinen Gleichungen der äquidistant verbiegbaren Flächen, obwohl nach § V der schon mehrfach erwähnten Abhandlung von Herrn Voss die Fläche F noch auf mannigfaltige Weise wählbar ist, da die drei Funktionen Θ nur bis auf willkürliche Konstante c_1, c_2, c_3 bestimmt sind und bei der Integration noch je eine Konstante den x hinzugefügt werden kann. Wir erhalten also scheinbar allgemeiner:

$$14) \quad \begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 - c_2\frac{uv-1}{1+uv} + c_3\frac{i(v-u)}{1+uv} + C_1 \\ \bar{x}_2 &= x_2 - c_3\frac{u+v}{1+uv} + c_1\frac{uv-1}{1+uv} + C_2 \\ x_3 &= x_3 - c_1\frac{i(v-u)}{1+uv} + c_2\frac{u+v}{1+uv} + C_3, \end{aligned}$$

aber diese Zusätze ergeben sich, wenn wir an Stelle von f und g in 13) setzen: $|f|$ und $|g|$[2]), so dass die Formeln 14) folgen, wenn wir an Stelle der ganz beliebigen Funktionen f und g die in nicht höherem Grade beliebigen Funktionen $f + |f|$ und $g + |g|$ setzen.

Wir sehen ferner, dass die Zuordnung der äquidistant-verbiegbaren Flächen F zu den Minimalflächen Φ genau dieselbe ist, wie in § 1 durch die dort angegebene Konstruktion.

[1]) Vergl. p. 16.

[2]) Vgl. p. 18 und 19.

Kapitel II.

Die allgemeine, äquidistant verbiegbare Fläche und ihre äquidistante Verbiegung.

§ 1. Die allgemeine komplexe Fläche.

Die Berechnung der Fundamentalgrössen erster Ordnung unserer Fläche geschieht am einfachsten vermittelst der Formeln 10) p. 14 unter Berücksichtigung der aus den Gleichungen 7) p. 13 folgenden Beziehungen:

$$\Sigma \varphi^2 = 1$$

1) $$\Sigma \varphi \varphi_u = 0 , \qquad \Sigma \varphi \varphi_v = 0$$

$$\Sigma \varphi_u^2 = 0 , \qquad \Sigma \varphi_u \varphi_v = \frac{2}{(1+uv)^2} , \qquad \Sigma \varphi_v^2 = 0 .$$

Es folgt unmittelbar:

$$(e) = \Sigma x_u^2 = -\psi_u^2,$$

2) $$(f) = \Sigma x_u x_v = \frac{2\psi^2}{(1+uv)^2} + \psi_u \psi_v \quad ^1)$$

$$(g) = \Sigma x_v^2 = -\psi_v^2,$$

wo

3) $$\psi = i\frac{(1+uv)(g'-f') + 2(vf-ug)}{1+uv}.$$

Die Einführung dieser Funktion, welche, wie wir in Kapitel I § 1 sahen, die charakteristische Funktion der Deformation der Kugel ist, wird sich auch im weiteren nützlich erweisen. Um für die vorkommenden Rechnungen mit ψ vorbereitet zu sein, schreiben wir noch die zweiten Ableitungen der Funktion an:

$$\psi_{uu} = -if''' - \frac{2v}{1+uv}\psi_u$$

4) $$\psi_{uv} = -\frac{2\psi}{(1+uv)^2}$$

$$\psi_{vv} = ig''' - \frac{2u}{1+uv}\psi_v.$$

1) Diese Fundamentalgrössen von F sollen, um sie nicht mit den beliebigen Funktionen f und g zu verwechseln, (e), (f), (g) geschrieben werden.

Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung folgen am einfachsten aus den Formeln 4) p. 21 unter Zuziehung der Formeln 8) p. 24. Nach 10) und 11) p. 24 werden die hiezu nötigen Werte von Δ und r:

$$5) \qquad \Delta = \frac{f''' g''' (1 + u v)^2}{2 i} \psi$$

und

$$6) \qquad r^2 = \psi_u \psi_v (1 + u v)^2 + \psi^2 = \psi^2 (1 + \Delta_1 \psi)\ ^1),$$

wo $\Delta_1 \psi = \frac{\psi_u \psi_v (1 + u v)^2}{\psi^2}$ den ersten Differentialparameter von ψ bedeutet.

Es wird dann:

$$8) \qquad E = -\frac{f'''}{\sqrt{1 + \Delta_1 \psi}}; \quad F = 0, \quad G = -\frac{g'''}{\sqrt{1 + \Delta_1 \psi}}.$$

Weiter bekommen wir:

$$9) \qquad H = (e)(g) - (f)^2 = -\frac{4 \psi^2 r^2}{(1 + u v)^4} = -\frac{4 \psi^1 (1 + \Delta_1 \psi)}{(1 + u v)^4}.$$

Das Längenelement können wir auf die beiden Formen bringen:

$$10) \qquad ds^2 = -(\psi_u du - \psi_v dv)^2 + \frac{4 \psi^2}{(1 + u v)^2} du dv,$$

und

$$10') \qquad ds^2 = -(\psi_u du + \psi_v dv)^2 + \frac{4 r^2}{(1 + u v)^2} du dv,$$

woraus durch entsprechende Multiplikation und Subtraktion auch folgt:

$$10'') \quad ds^2 = -\frac{r^2}{r^2 - \psi^2}(\psi_u du - \psi_v dv)^2 + \frac{\psi^2}{r^2 - \psi^2}(\psi_u du + \psi_v dv)^2$$

---

1) Auch die Abkürzung r soll im Folgenden teilweise verwendet werden. Für die Derivierten nach u und v erhalten wir

$$7) \qquad r_u = -\frac{i f''' \psi_v (1 + u v)^2}{2 r}, \quad r_v = \frac{i g''' \psi_u (1 + u v)^2}{2 r}$$

$$\text{und } r_{uv} = \frac{f''' g''' (1 + u v)^4}{4 r^3} \left[2 \frac{\psi^2}{(1 + u v)^2} + \psi_u \psi_v \right].$$

d. h. die beiden Kurvensysteme

$$\psi_u \, du - \psi_v \, dv = 0$$

und

$$\psi_u \, du + \psi_v \, dv = 0$$

sind orthogonal.

Die charakteristische Funktion $\bar{\psi}$ der äquidistanten Deformation unserer Fläche ist gleich dem reciproken Werte von r [1]). Wir haben nämlich:

$$\Sigma x_u \varphi_v = - \Sigma x_v \varphi_u = \sqrt{H} \, \bar{\psi} \, .$$

Nun ist aber nach 10) p. 14 und nach den Formeln 1) und 9) dieses Paragraphen:

$$\Sigma x_u \varphi_v = \frac{2 i \psi}{(1 + u v)^2} = \sqrt{H} . \frac{1}{r},$$

also

$$\bar{\psi} = \frac{1}{r}.$$

Aus 8) folgt die durch Einfachheit sich auszeichnende Differentialgleichung der Haupttangentenkurven:

11) $$f''' \, du^2 + g''' \, dv^2 = 0,$$

aus der wir ersehen, dass die endliche Gleichung dieser Kurven durch Quadratur erhalten wird.

Die mittlere Gleichung 8) sagt aus, dass unsere Fläche in der gegebenen Darstellung auf ein konjugiertes Koordinatensystem bezogen ist. Dieses wird noch näher bestimmt, wenn wir die Grössen

$$B = \frac{(g)(e)_v - (f)(g)_u}{2H} \qquad B_1 = \frac{(e)(g)_u - (f)(e)_v}{2H}$$ [2])

bilden. Aus den Gleichungen 2) folgt unter Rücksichtnahme auf 4)

$$B = \frac{\psi_v}{\psi} = \frac{\partial \ln \psi}{\partial v}, \qquad B_1 = \frac{\psi_u}{\psi} = \frac{\partial \ln \psi}{\partial u}$$

d. h.: Unsere Fläche ist in der in Kapitel I gegebenen Darstellung auf ein konjugiertes Koordinatensystem mit gleichen Invarianten bezogen.

Die Differentialgleichungen für die x, in denen B und B_1 als Koëffizienten auftreten, werden:

$$x_{uv} - \frac{\partial \ln \psi}{\partial v} x_u - \frac{\partial \ln \psi}{\partial u} x_v = 0$$

und können, wie ersichtlich, auch geschrieben werden:

[1]) Voss, Infinitesimale Biegungen § IV.

[2]) Fussnote p. 10.

$$\frac{\partial (x_v \sigma)}{\partial u} + \frac{\partial (x_u \sigma)}{\partial v} = 0,$$

wo $$\sigma = \frac{i}{\psi^2},$$

so dass das System

12) $$y_u = - x_u \sigma = - \frac{i x_u}{\psi^2} \qquad y_v = x_v \sigma = \frac{i x_v}{\psi^2}$$

integrabel ist.

Die Formeln 10) p. 14 geben:

13) $$y_1 = \frac{\varphi_1}{(-\psi)}, \quad y_2 = \frac{\varphi_2}{(-\psi)}, \quad y_3 = \frac{\varphi_3}{(-\psi)}.$$

Betrachten wir die y als die Koordinaten einer neuen Fläche, deren Fundamentalgrössen

14) $$e = - \frac{(e)}{\psi^4}, \quad f = \frac{(f)}{\psi^4}, \quad g = - \frac{(g)}{\psi^4}$$ [1])

$$E = - \frac{i}{\psi^2} E, \quad F = 0, \quad G = \frac{i}{\psi^2} G$$

werden, so erkennen wir, dass die Fläche y und die Fläche F ein Paar associierte Flächen sind[2]). Es sind nämlich nach 12) die Normalen der beiden Flächen parallel und nach 14) erfüllen die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung die Gleichung

$$\bar{E} G - 2 \bar{F} F + \bar{G} E = 0.$$

Die Fläche y ist die bei der äquidistanten Biegung der Fläche F associierte Fläche, denn der Abstand A ihrer Tangentialebene vom Koordinatenanfang ist gleich der charakteristischen Funktion der äquidistanten Verbiegung. Es ist nämlich:

15) $$A = \Sigma \frac{\Theta}{r} y = \frac{1}{r(-\psi)} \Sigma \Theta \varphi = \frac{1}{r},$$

da $$\Sigma \Theta \varphi = - \psi.$$

Weiter ist bemerkenswert, dass, da auch

$$B = \frac{\partial \ln \psi}{\partial v}, \qquad B_1 = \frac{\partial \ln \psi}{\partial u},$$

die Fläche y ebenfalls auf ein konjugiertes Koordinatensystem mit gleichen Invarianten bezogen ist.

Ferner sind, wie schon aus 12) ersichtlich, die Tangenten an die Koordinatenlinien auf y denen an die Koordinatenlinien auf F

[1]) Wir versehen die auf die Fläche y bezüglichen Grössen mit einem horizontalen Strich.

[2]) Bianchi a. a. O. p. 293, § 156.

parallel, so dass also auch auf der Fläche y die Koordinatenkurven eben sind.

Um einen weiteren Einblick in die Natur unserer Flächen zu gewinnen, sondern wir diejenigen Flächen ab, die zugleich anderen ausgezeichneten Flächenfamilien angehören. So sollen die Flächen konstanter Krümmung, die Minimalflächen und Regelflächen gesucht werden, die zugleich äquidistant verbiegbar sind. Ferner wollen wir nach denjenigen Flächen fragen, die bei ihrer äquidistanten Biegung eine Minimalfläche als associierte Fläche haben.

Das Krümmungsmass der äquidistant verbiegbaren Fläche wird:

16) $$K = -\frac{f''' g''' (1 + uv)^4}{4 r^4}.$$

Um die Flächen mit konstantem Krümmungsmass zu erhalten, sind f und g so zu bestimmen, dass diese Gleichung für konstantes K identisch erfüllt ist.

Nimmt man den Logarithmus[1]) und bildet die zweite Ableitung nach u und v, so folgt:

$$0 = \frac{4}{(1 + uv)^2} - 4\frac{r_{uv}}{r} + 4\frac{r_u r_v}{r^2}.$$

Hierin nach 7) die Werte der Derivierten von r eingesetzt, gibt:

$$\frac{4}{(1 + uv)^2} - \frac{f''' g''' (1 + uv)^4}{r^4} \cdot \frac{2\psi^2}{(1 + uv)^2} = 0$$

und unter Berücksichtigung der ursprünglichen Gleichung (16).

$$1 + 2K \cdot \psi^2 = 0.$$

Schreiben wir diese Identität

$$\psi = \frac{i}{\sqrt{2K}},$$

so würde durch Derivieren folgen:

$$f''' = 0, \quad g''' = 0$$

oder

$$f = A_1 u^2 + A_2 u + A_3,$$
$$g = B_1 v^2 + B_2 v + B_3.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in die obige Gleichung würde man die sich widersprechenden Gleichungen erhalten:

$$A_1 + B_3 = 0,$$
$$A_3 + B_1 = 0,$$
$$A_2 - B_2 = 0,$$
$$A_2 - B_2 = -\frac{i}{\sqrt{2K}}.$$

1) Infolgedessen gilt das unten erhaltene Resultat nicht für $K = 0$.

Es ist also unmöglich die Bedingung 16) für konstantes K durch entsprechende Wahl der Funktionen f und g zu erfüllen, d. h. es gibt keine äquidistant verbiegbaren Flächen konstanter, von Null verschiedener Krümmung.

Soll jedoch $K = 0$ sein, so sehen wir aus 16), dass dieses eintritt, wenn eine der Funktionen f''' oder g''' gleich Null wird. Wenn aber die Fläche von der Krümmung Null reell[1]) sein soll, so muss nach den Entwicklungen des folgenden Paragraphen, dann, wenn eine der Funktionen Null ist, auch die andere Null sein. In diesem und nur in diesem Falle haben wir eine reelle Fläche von der konstanten Krümmung Null und zwar eine Ebene (Kapitel III § 1).

Als Bedingung dafür, dass die äquidistant verbiegbare Fläche eine Minimalfläche wird, erhalten wir aus den Gleichungen 2) und 8) dieses Paragraphen:

17) $$\psi_u^2\, g''' + \psi_v^2\, f''' = 0,$$

wofür wir schreiben können

$$\psi_u = C\sqrt{f'''}$$
$$\psi_v = Ci\sqrt{g'''}.$$

Berücksichtigen wir die Gleichung 11) der Haupttangentenkurven, so sehen wir, dass die äquidistant verbiegbare Fläche dann und nur dann Minimalfläche wird, wenn das eine System der Haupttangentenkurven mit dem Kurvensystem

$$\psi_u\, du + \psi_v\, dv = 0$$

und das andere mit dem orthogonalen

$$\psi_u\, du - \psi_v\, dv = 0$$

zusammenfällt.

Nun wird aber, wie unten (p. 42) bewiesen wird, gerade unter der Bedingung 17) das System $\psi = \text{const}$ ein geodätisches Parallelsystem; also sind seine Orthogonaltrajektorien

$$\psi_u\, du - \psi_v\, dv = 0$$

geodätisch. Ist aber ein System von Haupttangentenkurven geodätisch, so ist die betreffende Fläche eine Regelfläche. Alle äquidistant verbiegbaren Minimalflächen sind daher zugleich Regelflächen und da die einzige geradlinige

[1]) Die imaginären Flächen von der Krümmung Null, die sich ergeben, wenn eine der Funktionen f''' und g''' Null ist, sind nicht eben, weil, wie Kapitel III, § 1 gezeigt wird, unsere allgemeinen Gleichungen nur dann eine (reelle oder imaginäre) Ebene darstellen, wenn $f''' = 0$ und $g''' = 0$ ist.

Minimalfläche die flachgängige Schraubenfläche ist, so ist diese die einzige äquidistant verbiegbare Minimalfläche (von der Ebene abgesehen)[1].

Diese Schraubenfläche ist aber auch umgekehrt die einzige äquidistant verbiegbare Regelfläche.

Zum Beweise dieser Umkehrung beachten wir folgendes: Die Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden (β) einer allgemeinen Regelfläche

$$x_i = a_i\,\alpha + b_i,$$

wo a_i und b_i Funktionen von β und $\Sigma\, a^2 = 1$, haben die Gleichung

$$d\,\alpha + f(\beta)\,d\,\beta = 0,$$

wo $f(\beta) = \Sigma\, a\, b'$ der zweite Koëffizient des Längenelementes ist.

Ist nun die Regelfläche auf ein Koordinatensystem bezogen, das mit dem ersteren durch die Gleichungen verbunden ist

$$U(u) - V(v) = \alpha,$$
$$U(u) - V(v) = \beta,$$

dann wird die Gleichung der Orthogonaltrajektorien der Erzeugenden

$$U'\,d\,u - V'\,d\,v + f(U + V)(U'\,d\,u + V'\,d\,v) = 0.$$

Soll also eine beliebige Fläche, die auf ein Koordinatensystem u, v bezogen ist, in dem sich die eine Schaar der Haupttangentenkurven in der Form

$$\beta = U(u) + V(v) = \text{const}$$

darstellt, eine Regelfläche sein, so muss notwendig die Differentialgleichung der Orthogonaltrajektorien von β sich auf die obige Form bringen lassen.

Nach Gleichung 11) p. 29 lassen sich nun, wenn wir setzen

$$U = \int \sqrt{f'''}\,d\,u, \qquad V = \pm\, i \int \sqrt{g'''}\,d\,v,$$

die eine Schar der Haupttangentenkurven unserer Fläche in der Form darstellen

$$U + V = \text{const}$$

und die Orthogonaltrajektorien derselben haben die Gleichung

$$-(\psi_v U' + \psi_u V')(\psi_u\,d\,u - \psi_v\,d\,v)$$
$$-\frac{2\,\psi^2}{(1 + u\,v)^2}(U'\,d\,u - V'\,d\,v) = 0,$$

welche nur dann die verlangte Form annimmt, wenn

[1] Diesen Satz, aber nicht die Umkehrung, hat übrigens schon Ribaucour auf p. 72 seiner Abhandlung: Étude des Élassoides ou surfaces à courbure moyenne nulle (Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie royale de Belgique in 4° t. XLIV; 1881), die mir erst nach Vollendung meiner Arbeit bekannt wurde, bewiesen.

$$\psi_v U' + \psi_u V' = 0$$

ist. Setzt man die Werte von U′ und V′ ein, so wird die Bedingung:

$$\psi_v \sqrt{f'''} \pm i\, \psi_u \sqrt{g'''} = 0.$$

Fasst man beide Gleichungen zusammen, so erhält man als notwendige Bedingung dafür, dass unsere Fläche eine Regelfläche wird:

$$\psi_u{}^2 g''' + \psi_v{}^2 f''' = 0.$$

Die notwendige Bedingung für eine Regelfläche fällt daher mit der hinreichenden zusammen, womit der Satz bewiesen ist.

Um nun die Gleichungen der Schraubenfläche in der für die Untersuchung ihrer äquidistanten Biegung zweckmässigen Form d. h. als Spezialfall unserer allgemeinen Formeln zu erhalten, müssen wir die Funktionen f und g so bestimmen, dass die Gleichung 17) identisch erfüllt ist. Durch das sich hierbei ergebende Resultat machen wir uns zugleich unabhängig von dem Satze, dass nur die flachgängige Schraubenfläche zugleich Minimalfläche und Regelfläche ist.

Schliessen wir den in Kapitel III § 1 zu behandelnden Fall, wo $f''' = g''' = 0$ ist, aus, so können wir die obige Identität schreiben:

17′) $$\frac{\psi_u}{\sqrt{f'''}} = i\, \frac{\psi_v}{\sqrt{g'''}},$$

wo $i = \sqrt{-1}$, wie auch im Folgenden, zweiwertig zu denken ist.

Es ist nun

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \left| \frac{\psi_u}{\sqrt{f'''}} \right| = -2 \frac{\partial}{\partial u} \left| \frac{\psi}{\sqrt{f'''}\,(1+uv)^2} \right|$$

$$= -\frac{2}{(1+uv)^2} \frac{\psi_u}{\sqrt{f'''}} + \frac{\psi}{(1+uv)^3} \frac{f^{IV}(1+uv) + 4v f'''}{\sqrt{f'''^3}}.$$

Ebenso erhält man:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \left| \frac{\psi_v}{\sqrt{g'''}} \right| = -\frac{2}{(1+uv)^2} \frac{\psi_v}{\sqrt{g'''}}$$

$$+ \frac{\psi}{(1+uv)^3} \frac{g^{IV}(1+uv) + 4u g''}{\sqrt{g'''^3}},$$

welche Gleichung sich übrigens auch durch Vertauschen von u mit v und f mit g aus der obigen ergibt.

Da für identisch verschwindendes ψ unsere allgemeinen Gleichungen keine wirkliche Fläche mehr darstellen, so folgt also aus 17′) durch Derivieren nach u und v

18) $$\frac{f^{IV}(1+uv)+4vf'''}{\sqrt{f'''^3}} = i\frac{g^{IV}(1+uv)+4ug'''}{\sqrt{g'''^3}}.$$

Durch nochmaliges Derivieren nach u und v erhalten wir hieraus:

$$\frac{d}{du}\left|\frac{f^{IV}u+4f'''}{\sqrt{f'''^3}}\right| = i\frac{d}{dv}\left|\frac{g^{IV}v+4g'''}{\sqrt{g'''^3}}\right|,$$

welche Gleichung zerlegt werden kann in die beiden:

19) $$\frac{f^{IV}u+4f'''}{\sqrt{f'''^3}} = iau+b, \quad 19') \quad \frac{g^{IV}v+4g'''}{\sqrt{g'''^3}} = av+b',$$

wo a, b, b′ beliebige Konstante bedeuten. Setzt man die Werte der linken Seiten von 19) und 19′) in 18) ein, so folgt:

$$\frac{f^{IV}}{\sqrt{f'''^3}} + bv = i\frac{g^{IV}}{\sqrt{g'''^3}} + ib'u.$$

Diese Gleichung aber lässt sich zerlegen in:

$$\frac{f^{IV}}{\sqrt{f'''^3}} = ib'u + \frac{c}{2}, \quad \frac{g^{IV}}{\sqrt{g'''^3}} = -ibv - i\frac{c}{2}.$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt:

$$-\frac{4}{\sqrt{f'''}} = ib'u^2 + cu + c_1,$$

also

20) $$f''' = \frac{16}{(ib'u^2+cu+c_1)^2}.$$

Analog ergibt sich aus der 2ten Gleichung

20′) $$g''' = \frac{16}{(-ibv^2-icv+c_2)^2}.$$

Diese Werte erfüllen die Gleichung 18) nur dann identisch, wenn

$$b=0, \quad b'=0, \quad c_1=0, \quad c_2=0,$$

so dass die Identität 18) besteht für

$$f''' = \frac{16}{c^2u^2}, \quad g''' = -\frac{16}{c^2v^2}.$$

Hieraus folgen die Funktionen:

$$f = -\frac{16}{c^2}(u\ln(u)-u) + A_1u^2 + A_2u + A_3$$

$$g = +\frac{16}{c^2}(v\ln(v)-v) + B_1v^2 + B_2v + B_3,$$

welche 17′) identisch erfüllen, wenn

$$(A_3+B_1)uv^2 + (B_3+A_1)u = -(A_1+B_3)u^2v - (A_3+B_1)v.$$

Diese Gleichung besteht dann und nur dann für beliebiges u und v, wenn

$A_3 + B_1 = 0$ und $A_1 + B_3 = 0$ ist.

Führen wir nun, wie Kapitel III. p. 50 und Kapitel I, p. 18 statt der Konstanten A und B die Konstanten c und C ein, so erkennen wir, dass

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 0, \quad c_3 \text{ beliebig},$$
$$C_1, \; C_2 \text{ und } C_3 \text{ beliebig}$$

genommen werden können. Da aber die C die Fläche nicht wesentlich ändern. sondern nur eine Parallelverschiebung bewirken, so setzen wir sie Null und erhalten für f und g

$$f = -\frac{16}{c^2}\, u \ln(u) + \left(\frac{16}{c^2} + \frac{i\, c_3}{2}\right) u,$$
$$g = +\frac{16}{c^2}\, v \ln(v) - \left(\frac{16}{c^2} + \frac{i\, c_3}{2}\right) v.$$

Der einfacheren Schreibweise halber setzen wir noch

$$\frac{16}{c^2} = -\, k\, i, \qquad -k + \frac{c_3}{2} = k_1,$$

dann ist:

21) $$f = i\,[k\, u \ln(u) + k_1\, u], \qquad g = -\, i\,[k\, v \ln(v) + k_1\, v].$$

Diese Funktionen in die allgemeinen Gleichungen eingesetzt, gibt:

22)
$$x_1 = i\, \frac{v - u}{1 + u\, v}\left(k \ln(u\, v) + 2\, k_1\right)$$
$$x_2 = -\frac{u + v}{1 + u\, v}\left(k \ln(u\, v) + 2\, k_1\right)$$
$$x_3 = -\, i\, k \ln\left(\frac{u}{v}\right).$$

Hieraus folgt als Gleichung zwischen den x

23) $$x_3 = -\, 2\, k \operatorname{arc\,tg} \frac{x_1}{x_2},$$

die Gleichung der allgemeinen, flachgängigen Schraubenfläche. Wir finden also bestätigt, dass diese Schraubenfläche die einzige äquidistant verbiegbare Minimalfläche ist.

Setzen wir die Werte 21) von f und g in die allgemeine Gleichung der Minimalflächen ein, so erhalten wir die zur Schraubenfläche als äquidistant verbiegbarer Fläche gehörige Minimalfläche zu:

$$\xi_1 = -\frac{k}{2}\, i\, \frac{(v - u)\,(u\, v - 1)}{u\, v},$$
$$\xi_2 = \frac{k}{2}\, \frac{(u + v)\,(u\, v - 1)}{u\, v},$$
$$\xi_3 = -\, i\, k \ln\left(\frac{u}{v}\right),$$

woraus sich als Gleichung zwischen den ξ ergibt

$$\xi_3 = -2\,k \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right),$$

also genau dieselbe Schraubenfläche, wie diejenige, welche sich als äquidistant verbiegbare Fläche ergab.

Es liegt also hier der Fall vor, dass die Minimalfläche sich mit einer der zugeordneten äquidistant verbiegbaren Flächen deckt. Dies ist auch, da diese Schraubenfläche die einzige äquidistant verbiegbare Minimalfläche, der einzige Fall, in dem eine solche Deckung möglich[1]). Die einander entsprechenden Punkte fallen nicht zusammen, sondern liegen nur auf derselben Geraden der beiden zusammenfallenden Schraubenflächen.

Soll schliesslich die associierte Fläche Minimalfläche werden, so muss nach den Gleichungen 14) p. 30 die Identität

24) $$\psi_u^2\, g''' - \psi_v^2\, f''' = 0$$

erfüllt sein. Schliessen wir den Fall $f''' = g''' = 0$, für den die obige Identität besteht und für den sich nach Kapitel III § 1 die Ebene ergibt, aus, so können wir die Gleichung 24) schreiben:

24′) $$\frac{\psi_u}{\sqrt{f'''}} = \frac{\psi_v}{\sqrt{g'''}}.$$

Durch eine der auf p. 34 ff. ausgeführten ganz analoge Rechnung folgt, dass der aus 24′) sich ergebenden Identität

25) $$\frac{f^{IV}(1 + u\,v) + 4\,v\,f'''}{\sqrt{f'''^3}} = \frac{g^{IV}(1 + u\,v) + 4\,u\,g'''}{\sqrt{g'''^3}}$$

die Funktionen

$$f''' = \frac{16}{c^2\,u^2}, \qquad g''' = \frac{16}{c^2\,v^2}$$

genügen. Damit die hieraus folgenden Werte

$$f = -\frac{16}{c^2}(u \ln(u) - u) + A_1\,u^2 + A_2\,u + A_3,$$

$$g = -\frac{16}{c^2}(v \ln(v) - v) + B_1\,v^2 + B_2\,v + B_3,$$

24′) identisch erfüllen, muss

$$\frac{8}{c^2}(u^2\,v^2 - 1) + (A_3 + B_1)\,u\,v^2 + (A_1 + B_3)\,u,$$

$$= -\frac{8}{c^2}(u^2\,v^2 - 1) - (A_1 + B_3)\,u^2\,v - (A_3 + B_1)\,v$$

sein.

[1]) Vergl. die p. 17 angegebene Konstruktion.

Diese Gleichung kann für beliebiges u und v nur dann bestehen, wenn ausser

$$A_1 + B_3 = 0 \text{ und } A_3 + B_1 = 0.$$

auch $\frac{8}{c^2} = 0$ ist, d. h.:

Ausser der Ebene gibt es keine äquidistant verbiegbare Fläche, die als associierte Fläche eine Minimalfläche hat.

§ 2. Die äquidistante Biegung der Fläche.

Bei der Verbiegung erleidet jeder Punkt der Fläche eine unendlich kleine Lagenänderung, welche sich aus einer Verschiebung in einer bestimmten Richtung und aus einer Rotation um eine bestimmte Achse zusammensetzt. Nach diesen beiden Gesichtspunkten ist also der Vorgang der Verbiegung zu untersuchen.

Die Verschiebungsrichtung eines Flächenpunktes wird, wie wir in Kapitel I § 1 sahen, dadurch erhalten, dass wir die Schnittlinie der beiden Ebenen bestimmen, in denen die durch den Punkt gehenden Koordinatenkurven u und v liegen. Da diese beiden Ebenen, wie wir gesehen, den unendlich fernen, imaginären Kugelkreis berühren, so bilden alle Geraden derselben also auch die Tangenten an die Koordinatenkurven in dem betrachteten Punkte mit der Verschiebungsrichtung den Winkel Null.

Dies gibt Veranlassung die allgemeineren Kurvensysteme zu betrachten, deren Tangenten einen konstanten Winkel ω mit den Verschiebungsrichtungen bilden, und in denen also die Koordinatenkurven als ein spezieller Fall enthalten sind.

Es ist

$$\cos \omega = \Sigma \varphi \frac{dx}{ds}.$$

Erhebt man ins Quadrat und setzt die aus den Gleichungen 10) p. 14 folgenden Werte von dx und den in 10) p. 28 angegebenen Wert von ds^2 ein, so bekommt man, wenn man noch die Gleichungen 1) p. 27 berücksichtigt:

$$1) \qquad (\psi_u du - \psi_v dv)^2 \operatorname{tg}^2 \omega + \frac{4\psi^2}{(1+uv)^2} du\, dv = 0$$

als Differentialgleichung der oben definierten Kurvensysteme. Diese

überdecken die Fläche in der Weise, dass durch jeden Punkt zwei Kurven eines Systems hindurchgehen.

Für $\omega = 0$ erhalten wir, wie es sein muss, die Koordinatenlinien.

Für $\operatorname{tg}^2 \omega = -1$ wird die Differentialgleichung

$$-(\psi_u \, du - \psi_v \, dv)^2 + \frac{4\psi^2}{(1+uv)^2} du \, dv = 0,$$

welche nach 10) p. 28 mit der Gleichung der Minimallinien identisch ist. Dies war nicht anders zu erwarten, da die Tangenten der beiden durch den Punkt gehenden Minimallinien mit allen Richtungen also auch mit der Verschiebungsrichtung einen konstanten, unendlich grossen[1]) Winkel bilden.

Wählen wir $\omega = 90$, so wird die Gleichung 1)

2) $$\psi_u \, du - \psi_v \, dv = 0,$$

d. h. hiefür fallen die beiden Kurvensysteme in eines zusammen, so dass also durch jeden Punkt nur eine solche Kurve hindurchgeht. Die Tangente derselben halbiert den Winkel, den die zwei durch den bezüglichen Punkt gehenden Kurven irgend eines der Systeme 1) mit einander bilden. Die andere Winkelhalbierende ist Tangente an die durch den betrachteten Punkt gehende Orthogonaltrajektorie des Systems 2), d. h. nach 10″) p. 28 an

3) $$\psi_u \, du + \psi_v \, dv = 0.$$

Wie man nun leicht erkennt, sind die Tangenten dieses Systems $\psi = \text{const}$ die Projektionen der Verschiebungsrichtungen auf die bezügliche Tangentialebene.

Auch der erste Differentialparameter von ψ hat eine einfache, auf die Verschiebungsrichtung bezügliche geometrische Bedeutung. Es ist nämlich:

4) $$\Delta_1 \psi = \frac{\psi_u \psi_v (1+uv)^2}{\psi^2} = \operatorname{cotg}^2 w,$$

wenn w der Winkel der Verschiebungsrichtung mit der Tangentialebene in dem betreffenden Punkte ist.

4′) $$\Delta_1 \psi = \text{const}$$

ist daher die Gleichung der Kurven, die alle jene Punkte zusammenfassen, deren Verschiebungsrichtung einen konstanten Winkel mit der zugehörigen Tangentialebene, also auch mit der Normalen bildet.

Zum Beweise von 4) beachten wir, dass

$$\sin w \cdot \Sigma \varphi \, p = \Sigma \varphi \frac{\Theta}{r}.$$

[1]) Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie I. Band p. 147.

und da, wie schon p. 30 bemerkt,

$$\Sigma \varphi \Theta = - \psi$$

und nach 6) p. 28

$$r = \psi \sqrt{1 + \Delta_1 \psi},$$

so kommt

$$\sin w = - \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta_1 \psi}},$$

woraus 4) folgt.

Lassen wir unendlich grosse Werte von u und v unberücksichtigt, so sehen wir aus der Gleichung 4), dass die Punkte der Kurve

5) $$\psi = 0$$

und nur diese bei der Biegung in der Tangentialebene verschoben werden, während die Gleichung der Kurve, deren Punkte in der Normalen bewegt werden,

6) $$\psi_u \psi_v (1 + u v)^2 = 0$$

ist. Da nun die Kurve 5) auch zu dem Systeme 3) gehört, so haben wir den Satz:

Die Verschiebungsrichtungen der Punkte von $\psi = 0$ fallen mit den Tangenten dieser Kurve zusammen, so dass also die Kurve $\psi = 0$ bei der Biegung in sich verschoben wird.

Aus den Formeln 10) p. 14 erkennen wir weiter, dass für $\psi = 0$ die Richtungscosinus der Tangenten unserer Koordinatenkurven gleich $- \varphi_i$ resp. gleich $+ \varphi_i$ werden, d. h. die Tangenten fallen hier sowohl mit einander, als auch mit den Tangenten von $\psi = 0$ zusammen. Diese Kurve ist also auch die Umhüllende der Koordinatenlinien u, v.

Um nun die bei der Biegung stattfindende Rotation zu verfolgen, müssen wir die relative Koordinatenverschiebung [1]) der einem beliebigen Punkte x_i unendlich benachbarten Punkte untersuchen.

Da der Punkt x_i von F vermöge der Deformation die Koordinaten $x_i + \varepsilon \varphi_i$ erhält, so ist die Grösse der relativen Koordinatenverschiebung für den Punkt $x_i + dx_i$ gegeben durch die Komponenten $\varepsilon \, d \varphi_i$. Wir stellen uns also vor, dass das Flächenstückchen, das aus dem Punkte x_i mit seinen unendlich benachbarten Punkten besteht, um $\varepsilon \varphi$ parallel zu sich selbst verschoben

[1]) Voss, Biegungsdeformationen § IX, p. 267.

wird. Dadurch hat der Punkt x_i seine neuen Koordinaten erlangt, während die übrigen erst durch die weitere Verschiebung $\varepsilon\, d\varphi$ dieselben bekommen. Bei dieser letzteren Bewegung rotiert also das Flächenelement um eine durch $x_i + \varepsilon\varphi_i$ gehende Achse. Um die Grösse der Rotation und die Richtung ihrer Achse zu erhalten, müssen wir die $d\varphi_i$ durch die relativen Koordinaten dx_i der dem Punkte x_i unendlich benachbarten Punkte auszudrücken suchen. Dies gelingt durch die aus 3′) p. 23 folgende Identität:

$$\Sigma a\, dx = (a\, \Theta\, d\varphi)\,^1),$$

aus welcher man die drei Gleichungen erhält

$$\begin{aligned} dx_1 &= \Theta_2\, d\varphi_3 - \Theta_3\, d\varphi_2, \\ dx_2 &= \Theta_3\, d\varphi_1 - \Theta_1\, d\varphi_3, \\ dx_3 &= \Theta_1\, d\varphi_2 - \Theta_2\, d\varphi_1. \end{aligned} \qquad 7)$$

Die letzten beiden Gleichungen geben durch Multiplikation mit den Richtungscosious q_3 resp. q_2 der Normalen der Fläche Θ und durch Subtraktion

$$q_3\, dx_2 - q_2\, dx_3 = d\varphi_1\, \Sigma q\, \Theta - \Theta_1\, \Sigma q\, d\varphi.$$

Da nun die Normalen von Θ und φ parallel sind[2]), so ist

$$\Sigma q\, d\varphi = \Sigma p'\, d\varphi = 0;$$

also

$$\begin{aligned} d\varphi_1 &= \frac{1}{(\psi)}(q_3\, dx_2 - q_2\, dx_3), \\ d\varphi_2 &= \frac{1}{(\psi)}(q_1\, dx_3 - q_3\, dx_1), \\ d\varphi_3 &= \frac{1}{(\psi)}(q_2\, dx_1 - q_1\, dx_2), \end{aligned} \qquad 8)$$

wenn

$$(\psi) = \Sigma q\, \Theta = \Sigma p'\, \Theta, \qquad 9)$$

d. h. die Rotation, in der die relative Deformation in der Nähe eines Punktes besteht, ist gleich $\frac{\varepsilon}{(\psi)}$ und geht um eine der Normalen der Fläche φ parallele Achse vor sich.

Da in unserem Falle die Fläche φ eine Kugel mit dem Radius 1 ist, so ist $p'_i \quad \varphi_i$ d. h. die Rotationsachse fällt in die Verschiebungsrichtung φ_i.

Weiter wird $(\psi) = -\psi$; die Kurven $\psi = \text{const}$ sind

---

[1]) Voss, a. a. O. p. 270.

[2]) Vergl. die Gleichungen 6) p. 22.

also auch diejenigen Kurven, längs denen die Rotation konstant gleich $\frac{\varepsilon}{\psi}$ bleibt.

Den die Lage der Rotationsachse betreffenden Satz können wir auch umkehren, nämlich: Wenn eine Fläche die Eigenschaft hat, sich so verbiegen zu lassen, dass die Achse der totalen Rotation mit der Verschiebungsrichtung der Flächenpunkte zusammenfällt, dann ist diese Fläche eine äquidistant verbiegbare Fläche und die betreffende Verbiegung ist gerade die äquidistante.

Da der Radiusvektor von φ der Verschiebungsrichtung, die Normale der Achse der totalen Rotation parallel ist, so haben wir uns nur zu erinnern, dass die Fläche φ, deren Normale immer mit dem Radiusvektor zusammenfällt, eine Kugel ist.

Da wir gesehen haben, dass die Kurvensysteme

$$\psi = \text{const und } \Delta_1 \psi = \text{const}$$

bei der Verbiegung eine Hauptrolle spielen, so ist es von Interesse die Flächen zu kennen, für welche die Verbiegung eine Vereinfachung dadurch erfährt, dass diese beiden Systeme zusammenfallen. Dies ist dann der Fall, wenn die beiden Funktionen ψ und $\Delta_1 \psi$ von einander abhängig sind. Die Bedingung für die Abhängigkeit ist das Verschwinden der Funktionaldeterminante der beiden Funktionen d. h. die Erfüllung der Identität

$$9) \qquad \begin{vmatrix} (\Delta_1 \psi)_u & \psi_u \\ (\Delta_1 \psi)_v & \psi_v \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir für $\Delta_1 \psi$ seinen Wert

$$\Delta_1 \psi = \frac{r^2}{\psi^2} - 1 \; ^1)$$

ein, so erkennen wir unter Berücksichtigung der Gleichungen 7), p. 28), dass die Gleichung 9) identisch ist mit der Gleichung

$$\psi_u^2 \, g''' + \psi_v^2 \, f''' = 0,$$

d. h. nur für die äquidistant verbiegbaren Minimalflächen sind jene beiden Systeme identisch.

Die Gleichung 9) ist, wie bekannt, auch die Bedingung dafür, dass die Kurven $\psi = \text{const}$ ein geodätisches Parallelsystem auf der Fläche bilden, so dass dies immer dann und

[1]) Gl. 6) p. 28.

nur dann der Fall, wenn unsere Fläche eine Minimalfläche ist.

Noch eine weitere Deutung lässt die Bedingung 9) zu. Wir finden nämlich durch Bilden der Diskriminante der Gleichung 1), dass die Kurve

$$\Delta_1 \psi = \operatorname{cotg}^2 w$$

die Punkte enthält, für welche die beiden Tangenten des Systems 1) zusammenfallen. Die Richtung dieser Tangente folgt aus

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\psi_v}{\psi_u}$$

und fällt also mit der Tangentenrichtung der durch den betreffenden Punkt gehenden Kurve $\psi = \text{const}$ zusammen.

Hieraus und aus dem obigen ergibt sich dann unmittelbar, dass für die äquidistant verbiegbaren Minimalflächen und nur für diese $\Delta_1 \psi = \operatorname{cotg}^2 w$ die singuläre Lösung des Systems 1) ist.

Nachdem wir so die Biegung der Fläche F im einzelnen behandelt haben, drängt sich uns die Frage auf, ob eine solche Fläche immer nur auf zwei[1]) Arten äquidistant verbogen werden kann.

Aus den Formeln 7) p. 13 ersehen wir, dass zu jedem Wertepaare u, v immer nur ein System φ_i und umgekehrt zu jedem System φ_i nur ein Wertepaar u, v gehört. Bei den Gleichungen 13), p. 16 der äquidistant verbiegbaren Fläche dagegen wird es von den Funktionen f und g abhängen, ob jedem Flächenpunkte oder jedem Systeme x_i nur ein Wertepaar u, v und damit nur ein Paar von Verschiebungsrichtungen zugeordnet ist. Die f und g können so beschaffen sein, dass die Gleichungen 13) p. 16 eine mehrdeutige Auflösung nach den u und v besitzen. In diesem Falle überdecken die Koordinatenkurven die Fläche mehrfach, so dass man mit verschiedenen Werten von u und v zu demselben Punkte der Fläche gelangt. Da nun zu verschiedenen Wertepaaren u, v verschiedene Verschiebungsrichtungen gehören, so bleibt also hier für einzelne Flächen die Möglichkeit einer endlichen Anzahl von äquidistanten Verbiegungen offen, was bei den durch die betreffenden f und g bestimmten Flächen zu betrachten ist.

Es ist aber auch noch auf andere Weise möglich, dass denselben Punkten einer Fläche mehrere Verschiebungsrichtungen

[1]) Vergl. p. 13 Fussnote.

zugehören; nämlich dadurch, dass unsere allgemeinen Formeln bei bestimmten Funktionen f und g dieselbe Fläche darstellen für jeden Wert gewisser in den Funktionen f und g vorkommender Konstanten. Die Änderung dieser Konstanten lässt dann die Fläche ihrer Form nach ungeändert und bewirkt, abgesehen von einer etwaigen Lagenänderung, nur, dass die Fläche auf ein anderes Koordinatensystem u, v bezogen, durch die Formeln dargestellt wird. Es wird so derselbe Punkt der Fläche immer andern und andern Wertepaaren u, v zugeordnet und damit demselben Punkte immer andere Verschiebungsrichtungen und zwar sovielfach unendlich viele als derartige Konstante in f und g vorkommen.

Dieser Fall liegt in den äquidistant verbiegbaren Regelflächen (die Ebene mit eingeschlossen) vor, welche in Kapitel III § 1 und 2 eingehend behandelt werden.

Es gelang mir nicht die Frage zu beantworten, ob die betreffenden Regelflächen auch die einzigen auf unendlich viele Arten äquidistant verbiegbaren Flächen sind oder ob vielleicht noch andere Flächen diese Eigenschaft haben. Es scheint, dass die Lösung ähnlichen Schwierigkeiten unterliegt, wie die analoger, längst bekannter Probleme der Flächentheorie.

§ 3. Die reelle Fläche.

Bis jetzt haben wir die äquidistant verbiegbare Fläche allgemein betrachtet, ohne Rücksicht darauf, ob diese Fläche reelle Teile hat oder nicht. Wollen wir aber eine Vorstellung von der äquidistant verbiegbaren Fläche und ihrer Verbiegung gewinnen, so müssen wir die Flächen betrachten, die reelle, äquidistant verbiegbare Teile haben und diese Teile auf ihre Verbiegung hin untersuchen.

Zunächst ist festzustellen, unter welchen Bedingungen unsere allgemeinen Formeln reelle Flächenstücke vorstellen, zu deren Punkten auch reelle Verschiebungsrichtungen gehören, denn nur solche Flächenstücke sind reell und zugleich reell äquidistant verbiegbar. Die Verschiebungsrichtungen

$$\varphi_1 = \frac{u+v}{1+uv}, \qquad \varphi_2 = i\,\frac{v-u}{1+uv}, \qquad \varphi_3 = \frac{uv-1}{1+uv}$$

sind dann und nur dann reell, wenn den beiden Variablen u und v konjugiert imaginäre Werte beigelegt werden. Es kommen also

nur solche reelle Punkte der Fläche in Betracht, die zu konjugiert imaginären u und v gehören. Sollten sich auch reelle Punkte für nicht konjugiert imaginäre u und v ergeben, so gehören diese reellen Teile nicht mehr zu der reell äquidistant verbiegbaren Fläche. Wir setzen also:

$$u = \alpha + \beta i \qquad v = \alpha - \beta i.$$

Die Funktionen f und g der komplexen Veränderlichen u und v sollen sich als komplexe Funktionen der beiden Veränderlichen α, β in der Form darstellen:

$$f = f_1 + f_2 i, \qquad g = g_1 + g_2 i$$

und die Ableitungen f′ und g′ in der Form

$$f' = f'_1 + f'_2 i, \qquad g' = g_1 + g'_2 i \text{ [1]},$$

dann erhalten wir für die Koordinaten der Fläche die Gleichungen:

$$x_1 = 2\,\frac{[\alpha(f_1' + g_1') - (f_1 + g_1)] + i\,[\alpha(f_2' + g_2') - (f_2 + g_2)]}{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$x_2 = 2\,\frac{[\beta(f_1' + g_1') - (f_2 - g_2)] + i\,[\beta(f_2' + g_2') - (g_1 - f_1)]}{1 + \alpha^2 + \beta^2},$$

$$x_3 = 2\,\frac{[(\alpha^2 + \beta^2 - 1)(f_1' + g_1') - \alpha(f_1 + g_1) - \beta(f_2 - g_2)]}{1 + \alpha^2 + \beta^2}$$
$$+ 2i\,\frac{[(\alpha^2 + \beta^2 - 1)(f_2' - g_2') - \alpha(f_2 + g_2) + \beta(f_1 - g_1)]}{1 + \alpha^2 + \beta^2}.$$

Die Koordinaten werden reell, wenn die imaginären Bestandteile verschwinden, d. h. wenn:

$$\alpha(f_2' + g_2') \quad f_2 + g_2,$$
$$\beta(f_2' + g_2') \quad g_1 - f_1,$$
$$(\alpha^2 + \beta^2 - 1)(f'_2 + g_2') \quad \alpha(f_2 + g_2) + \beta(g_1 - f_1).$$

Hieraus können wir aber die beiden Gleichungen ableiten:

$$(f_2 + g_2)(1 - \beta^2) + (g_1 - f_1) \quad \alpha\beta = 0,$$
$$(f_2 + g_2) \quad \alpha\beta \quad + (g_1 - f_1)(1 - \alpha^2) = 0,$$

welche nur dann neben einander bestehen, wenn

$$f_2 + g_2 = 0 \quad \text{und} \quad g_1 - f_1 = 0,$$

d. h. wenn f und g konjugiert imiginäre Funktionen sind.

Ist umgekehrt f und g konjugiert, so ist auch f′ und g′ konjugiert, und wir ersehen aus unsern Formeln leicht, dass sich dann immer für konjugiert imaginäre u und v reelle x_j ergeben. Wir haben also den Satz:

[1]) f_1', f_2' sind mit den partiellen Derivierten von f_1 und f_2 nach u und g_1', g_2' mit den partiellen Derivierten von g_1 und g_2 nach v identisch.

Die reellen, äquidistant verbiegbaren Flächenstücke ergeben sich, wenn wir in den allgemeinen Formeln der äquidistant verbiegbaren Flächen für f und g konjugierte Funktionen wählen und die u und v nur konjugiert imaginäre Werte annehmen lassen.

Alle Resultate des vorigen Paragraphen sind natürlich unmittelbar auf den speziellen Fall der reellen Fläche übertragbar. Die Kurve $\psi = 0$ aber erlangt hier noch eine weitere Eigenschaft, die jetzt entwickelt werden soll.

Nach den soeben angestellten Betrachtungen ist das Koordinatensystem u, v auf unserer reellen Fläche ein konjugiert imaginäres. Um eine bessere Vorstellung zu gewinnen, wollen wir das reelle Koordinatensystem α, β zu Grunde legen. Die Transformationsdeterminante wird

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_\alpha & u_\beta \\ v_\alpha & v_\beta \end{vmatrix} = -2\,i \quad \text{also} \quad H(\alpha, \beta) = -4\,H(u\,v)\,.$$

Da Δ nie verschwindet, so wird $H(\alpha, \beta)$ da Null, wo $H(u, v)$ Null wird. Es berühren sich also die Koordinatenlinien α, β an denselben Stellen, an denen dies die Koordinatenkurven u, v thun. Den Punkten der reellen, äquidistant verbiegbaren Teile unserer Fläche und nur diesen entsprechen, wie vorhin konjugiert imaginäre u und v, so jetzt reelle α und β. Die Punkte unserer Fläche dagegen, die nicht reell sind, oder denen doch keine reellen Verschiebungsrichtungen zugehören, ergeben sich für imaginäre α, β. Für die ersteren Punkte wird

$$H(\alpha, \beta) = \frac{16\,\psi^4}{(1 + u\,v)^4}\,(1 + \Delta_1\,\psi)\ ^1)$$

reell und positiv, während es für die letzteren negativ oder im allgemeinen imiginär wird.

Um nun die Gleichung der Grenze der reellen Bestandteile zu gewinnen, nehmen wir an, wir befänden uns in derselben, dann ist, da diese doch noch zur reellen Fläche gehört, $H(\alpha, \beta)$ positiv reell, den Wert Null noch mit eingeschlossen. Wäre $H(\alpha, \beta)$ nicht Null, dann würden in einem solchen Punkte unsere Koordinatenlinien sich unter einem von Null verschiedenen Winkel schneiden, und wir könnten also den Koordinaten α, β solche reelle Zuwachse

---

[1]) $\Delta_1\,\psi$ in Bezug auf u und v gebildet und dann in die ganze Formel $u = \alpha + \beta\,i$, $v = \alpha - \beta\,i$ eingesetzt.

erteilen, dass wir jeden Punkt in der Umgebung des betrachteten erreichten. Dieser kann sich also nicht auf dem Rande der reellen Fläche befinden. Es bleibt also nur übrig, dass im Rande $H = 0$ ist oder, was für endliches und reelles α, β dasselbe, $\psi = 0$ ist.[1])

Wir sehen also, dass für die Randkurve immer $\psi = 0$ sein muss, während umgekehrt nicht folgt, dass wir uns immer, wenn $\psi = 0$ ist, in einem wirklichen Rande befinden. Wir wollen trotzdem durchweg die Kurve $\psi = 0$ als Randkurve bezeichnen und den Teil derselben, über den hinaus sich die reelle Fläche entweder nicht fortsetzt oder doch aufhört, reell verbiegbar zu sein, als wahren Rand von dem scheinbaren Rande unterscheiden. Längs des scheinbaren Randes können wir uns ja die Fläche zerschnitten denken und die einzelnen Teile betrachten.

Da, wenn $\psi = 0$, auch

$$\frac{x_{i\,\alpha}}{\sqrt{e_{(\alpha,\beta)}}} = \varphi_i \quad \text{und} \quad \frac{x_{i\,\beta}}{\sqrt{g_{(\alpha,\beta)}}} = -\varphi_i \ ,$$

so haben die dort zusammenfallenden Tangenten der Koordinaten α, β dieselben Richtungscosinus wie die Tangenten von $\psi = 0$ und diese Kurve ist also auch Umhüllende der Koordinatenlinien α, β. Der wahre und scheinbare Rand unterscheiden sich dadurch, dass der wahre die Umhüllende der Koordinatenlinien in der Weise ist, dass auf der einen Seite reelle Koordinatenkurven α, β die Umhüllende berühren, während auf der andern imaginäre Berührende vorhanden sind. Am scheinbaren Rande berühren die Umhüllende auf beiden Seiten reelle Koordinatenlinien α, β.

Auch durch ihr Krümmungsmass sind die reellen Flächen vor den allgemeinen komplexen ausgezeichnet. Aus der unter 16) p. 31 angegebenen Formel folgt, da für reelle Flächen f''' und g''', wie auch ψ_u und ψ_v konjugiert und ψ reell ist, dass die reellen, äquidistant verbiegbaren Flächen ein negatives Krümmungsmass oder im Grenzfall die Krümmung Null besitzen.

Dieses folgt übrigens auch, wenn wir die im Kapitel I § 1 gegebene Ableitung der Gleichungen der äquidistant verbiegbaren

---

[1]) Der Faktor $1 + \Delta_1 \psi$ kann nämlich für reelles α, β nicht verschwinden, weil $\Delta_1 \psi = \frac{\psi_u \psi_v (1 + u v)^2}{\psi^2}$ für $\begin{matrix} u = \alpha + \beta i \\ v = \alpha - \beta i \end{matrix}$ aus lauter Quadraten additiv und multiplicativ zusammengesetzt ist und nie gleich -1 werden kann.

Fläche berücksichtigen, aus dem bei Bianchi a. a. O p. 300 angegebenen Satze. Ebenso wenn wir uns auf die im Kapitel I § 2 gegebene Ableitung beziehen, aus der bei Herrn Voss § V p. 246 angegebenen Formel.

An die Betrachtung der reellen Flächen schliesst sich passend eine geometrische Erläuterung der Resultate des § 2 an. Um zu zeigen, wie wir geometrisch zu den betrachteten Kurvensystemen gelangen, denken wir uns in jedem Punkte die betreffende Verschiebungsrichtung gezogen, dann schneidet ein um diese Gerade als Achse beschriebener Kreiskegel mit der Öffnung ω die zugehörige Tangentialebene im allgemeinen in zwei reellen oder imaginären Richtungen, den Tangenten der Kurven 1). Es gehen also durch jeden Punkt zwei solche Kurven. Wird $\omega = 90$, so geht der Kegel in die zur Verschiebungsrichtung normale Ebene über, welche die Tangentialebene nur in einer Geraden, der Tangente an die Kurve 2) schneidet. Ziehe ich in der Tangentialebene die Normale zu dieser Geraden, so ist dies die Projektion der Verschiebungsrichtung auf die Tangentialebene. Diese Projektionen umhüllen die Kurven 3).

Wähle ich für den um die Verschiebungsrichtung beschriebenen Kreiskegel gerade den Winkel w zum Öffnungswinkel, so berührt der Kegel die Tangentialebene und zwar in der Projektion der Verschiebungsrichtung. Fasse ich alle die Punkte zusammen, für die der Winkel w konstant bleibt, so erhalte ich die Kurven 4).

Im Falle $\omega = 0$ zerfällt, wie wir übrigens schon gesehen haben, der Kegel in zwei imaginäre Ebenen, die sich in der Verschiebungsrichtung schneiden und den imaginären Kugelkreis berühren. Die imaginären Schnittlinien dieser Ebenen mit der Tangentialebene geben die Tangenten der Koordinatenkurven. Nur wenn die Achse selbst in die Tangentialebene fällt, fallen die beiden imaginären Richtungen in eine reelle zusammen. Dies ereignet sich nach p. 47 in der Kurve $\psi = 0$ und zwar fällt diese Richtung gerade mit der Tangente dieser Kurve zusammen.

Sind nun die beiden Kurvensysteme

$$\psi = \text{const} \quad \text{und} \quad \Delta_1 \psi = \text{const}$$

auf der Fläche gegeben, so erhalten wir umgekehrt die Verschiebungsrichtungen. Die Tangente an die durch den betrachteten Punkt gehende Kurve $\psi = \text{const}$ bestimmt mit der Flächennormalen eine Ebene, in der die Verschiebungsrichtung liegt. Der Wert

von $\Delta_1 \psi$ für den Punkt bestimmt uns dann den Öffnungswinkel (90 — w) eines um die Normale beschriebenen Kegels, in dessen Schnittgeraden mit der Ebene die beiden Verschiebungsrichtungen liegen. Wir sehen also, da der Kegel die Ebene in zwei Graden schneidet, dass die Verschiebungsrichtungen durch ψ und $\Delta_1 \psi$ nicht vollständig bestimmt sind, sondern dass von den beiden, je in einer Geraden liegenden Paaren das richtige zu wählen ist.

Kapitel III.

Beispiele.

§ 1. Die Ebene.

Wählen wir in unseren allgemeinen Formeln für f und g Funktionen zweiten Grades

$$1) \qquad f = A_1 u^2 + A_2 u + A_3, \qquad g = B_1 v^2 + B_2 v + B_3,$$

dann werden die Gleichungen der zugehörigen Fläche:

$$2) \qquad \begin{aligned} x_1 &= c_3 i \frac{v-u}{1+uv} - c_2 \frac{uv-1}{1+uv} + C_1 \\ x_2 &= c_1 \frac{uv-1}{1+uv} - c_3 \frac{u+v}{1+uv} + C_2 \\ x_3 &= c_2 \frac{u+v}{1+uv} - c_1 i \frac{v-u}{1+uv} + C_3, \end{aligned}$$

wenn wir noch setzen

$$3) \qquad \begin{aligned} i\Big[(A_1 - B_1) - (A_3 - B_3)\Big] &= c_1 \\ -\Big[(A_1 + B_1) + (A_3 + B_3)\Big] &= c_2 \\ -i\Big(A_2 - B_2\Big) &= c_3, \end{aligned}$$

$$3') \qquad \begin{aligned} \Big[(A_1 + B_1) - (A_3 + B_3)\Big] &= C_1 \\ i\Big[(A_1 - B_1) + (A_3 - B_3)\Big] &= C_2 \\ -A_2 + B_2\Big) &= C_3. \end{aligned}$$

In den Konstanten c und C geschrieben nehmen dann die Funktionen zweiten Grades die schon früher verwandte Form an:

$$f = + \frac{c_1 i - C_1}{4}(1 - u^2) + \frac{c_2 i - C_2}{4} i (1 + u^2) + \frac{c_3 i - C_3}{2} u$$

$$g = - \frac{c_1 i + C_1}{4}(1 - v^2) + \frac{c_2 i + C_2}{4} i (1 + v^2) - \frac{c_3 i + C_3}{2} v.$$

Wir sehen nun mit Leichtigkeit, dass durch die Gleichungen 2) die für reelle c und C reelle Ebene

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 - c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3$$

dargestellt wird. Diese ändert sich nicht, wenn wir die C_i sich so ändern lassen, dass dabei $c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3$ konstant bleibt.

Es kann aber hiedurch nach 2) ein und derselben Verschiebungsrichtung jeder beliebige Punkt der Ebene oder es können, anders aufgefasst, hiedurch ein und demselben Punkt der Ebene immer andere und zwar zweifach unendlich viele Verschiebungsrichtungen zugeordnet werden. Wir erkennen also, dass eine Ebene mindestens auf zweifach unendlich viele Weisen äquidistant verbogen werden kann. Alle diese Verbiegungen aber sind nicht von einander verschieden, da diese Änderung der C nur eine Bewegung der Ebene in sich bedeutet, durch welche die Verschiebungsrichtungen unter Beibehaltung ihrer Orientierung einfach an eine andere Stelle gerückt werden.

Lassen wir die Bedingung, dass $c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3$ konstant bleibt, fallen, so wird auch noch eine Parallelverschiebung der Ebene zugelassen, wodurch wir aber keine neue Verbiegung erhalten, sondern nur die Schar der zur ursprünglichen parallelen Ebenen, welche genau so verbogen werden, wie diese. Wir nehmen also, indem wir die Ebene noch parallel zu sich so verschieben, dass sie durch den Koordinatenanfang geht, $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ an und haben die Fläche:

$$2') \qquad \begin{aligned} x_1 &= c_3 i \frac{v - u}{1 + u v} - c_2 \frac{u v - 1}{1 + u v} = c_3 \varphi_2 - c_2 \varphi_3 \\ x_2 &= c_1 \frac{u v - 1}{1 + u v} - c_3 \frac{u + v}{1 + u v} = c_1 \varphi_3 - c_3 \varphi_1 \\ x_3 &= c_2 \frac{u + v}{1 + u v} - c_1 i \frac{v - u}{1 + u v} = c_2 \varphi_1 - c_1 \varphi_2 \end{aligned}$$

auf ihre Verbiegung hin zu untersuchen.

Die beiden für die Verbiegung wichtigen Kurvensysteme werden, wenn wir noch setzen

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 - r^2 \quad ^1)$$

3) $$\psi \equiv c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3 = \text{const}$$

und

4) $$\Delta_1 \psi \equiv \frac{r^2 - \psi^2}{\psi^2} = \text{cotg}^2 w ,$$

d. h. die beiden Kurvensysteme fallen zusammen, wie zu erwarten war, da ja die Ebene auch Minimalfläche. Um die Gestalt dieser Kurven zu erkennen, quadrieren und addieren wir die Gleichungen 2′), dann folgt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (c_3 \varphi_2 - c_2 \varphi_3)^2 + (c_1 \varphi_3 - c_3 \varphi_1)^2 + (c_2 \varphi_1 - c_1 \varphi_2)^2$$

Diese Gleichung können wir durch Umformung der rechten Seite auch schreiben:

5) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + (c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3)^2 - r^2 - \psi^2 ,$$

d. h. die Kurven sind die Schnitte der Ebenen mit einer Schar konzentrischer Kugeln, und daher konzentrische Kreise. Der für $\psi = 0$ sich ergebende Kreis ist der wahre Rand des äquidistant verbiegbaren Stücks der Ebene, weil sein Radius der Maximalwert ist, der sich bei konjugiert imaginären u und v für $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ ergibt, so dass wir also mit konjugiert imaginärem u und v nicht über diesen Kreis hinauskommen können. Eine ebene Kreisscheibe ist also eine äquidistant verbiegbare Fläche und aus dem unten folgenden Beweise, dass nur für Funktionen f und g von höchstens dem zweiten Grade sich die Ebene ergibt, erkennen wir, dass das grösste Bereich eines ebenen äquidistant verbiegbaren Flächenstücks immer von einem Kreise begrenzt wird. Durch die Veränderung der C_i wird diese Kreisscheibe an immer andern Stellen der Ebene ausgeschnitten, auf welche Weise wir zweifach unendlich viele Verbiegungen dieser Ebene erhalten.

Nach den allgemeinen Entwicklungen über die Bedeutung der Kurvensysteme 3) und 4) für die Verbiegung folgt, dass bei dieser die konzentrischen Kreise sich unendlich wenig in sich verschieben

---

[1]) Vergl. p. 21 und 28.

und zugleich als Ganzes in der Richtung der Normalen verschoben werden. Der Kreis $\psi = 0$ wird nur in sich verschoben. Der Mittelpunkt wird in der Normalen bewegt.

Nun können aber auch noch die c_i beliebig geändert werden, ohne dass die Fläche dabei ihren Charakter als Ebene verliert. Lassen wir die c_i sich zunächst so ändern, dass dabei r konstant bleibt, dann sehen wir aus Gleichung 5), dass für denselben Wert von ψ immer derselbe Kreis sich ergiebt, dessen Punkte in einer Richtung verschoben werden, die nach 4) unter dem gleichen Winkel w gegen die Ebene geneigt ist. Es ergeben sich bei dieser Änderung der c_i also nicht unendlich viele neue Verbiegungen, sondern wir sehen, dass höchstens zwei Paare [1]) verschiedener Verbiegungen erhalten werden. Beide Paare von Verbiegungen sind möglich. Das eine Paar bekommen wir aus dem andern dadurch, dass wir die c_i mit entgegengesetztem Zeichen nehmen und so dieselben Verschiebungsrichtungen immer den diametral gegenüber liegenden Punkten der Kreisfläche zuordnen.

Lassen wir nun die Bedingung, dass r konstant bleibt, fallen, so erhalten wir unendlich viele neue Verbiegungen der Ebene, die sich dadurch unterscheiden, dass das reelle äquidistant verbiegbare Stück immer andere und andere Begrenzungskreise erhält, die aber alle konzentrisch sind. Die Verbiegungen aller dieser Kreisflächen gehen analog vor sich.

Wir sehen also schliesslich, dass eine Ebene auf im ganzen ∞^3 Arten äquidistant verbogen werden kann, die erhalten werden, indem man der Reihe nach, eine der ∞^3 verschiedenen Kreisflächen der Ebenen als reelles äquidistant verbiegbares Stück zu Grunde legt.

Aus der Art der Verbiegung geht hervor, dass die verbogene Fläche eine Rotationsfläche ist. Um die Gleichung der Meridiankurve zu erhalten, beachten wir, dass die Komponente $\varepsilon \cos w$ der Verschiebung eines Punktes auf dem Kreise mit dem Radius

$$x^2 \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

nach 4) und 5) gleich $\varepsilon \frac{x}{r}$ wird. Bezeichnen wir noch die Komponente der Verschiebung in der Normalen mit y, dann ist

$$\varepsilon^2 \frac{x^2}{r^2} + y^2 \quad \varepsilon^2$$

[1]) Vergl. p. 13.

oder

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{\varepsilon^2} = 1$$

die Gleichung der Meridiankurve. Die doppelt gedachte Kreisscheibe wird also in ein unendlich flaches Rotationsellipsoid [1]) verbogen.

Es soll nun noch bewiesen werden, dass die Formeln 13) p. 16 auch nur dann eine Ebene darstellen, wenn f und g Funktionen von keinem höheren, als dem zweiten Grade sind. Damit die Gleichungen eine Ebene darstellen, muss durch Multiplikation derselben mit Konstanten c und Addition folgen:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = a,$$

wo a eine Konstante, oder es muss die Indentität erfüllt sein:

$$6) \quad \begin{aligned} &[c_1 (u + v) + c_2 i (v - u) - c_3 (u v - 1)] (f' + g') - 2 c_1 (f + g) \\ &- 2 c_2 i (g - f) - 2 c_3 (v f + u g) - a (1 + u v) = 0. \end{aligned}$$

Nach u und v deriviert folgt:

$$\begin{aligned} &(c_1 + c_2 i + c_3 u) f'' + (c_1 \quad c_2 i + c_3 v) g'' \\ &+ c_3 (f' + g') - 2 c_3 g' - 2 c f' + a = 0. \end{aligned}$$

Dies nach u deriviert, kommt:

$$[c_1 + c_2 i + c_3 u] f''' = 0,$$

nach v deriviert:

$$[c_1 - c_2 i + c_3 v] g''' = 0.$$

Da die c ganz beliebige Konstante sind, so folgt hieraus

$$7) \qquad f''' = 0 \text{ und } g''' = 0.$$

Nun wissen wir, dass die Identität 6) durch Funktionen f und g, die den Bedingungen 7) genügen, wirklich erfüllt ist. Diese Bedingungen sind daher notwendig und hinreichend dafür, dass durch unsere Formeln eine Ebene dargestellt wird.

§ 2. Die Schraubenfläche.

Wir wollen weiter die Schraubenfläche betrachten, die wir schon p. 37, als äquidistant verbiegbare Fläche erkannt haben.

[1]) Es war nicht etwa zu erwarten, dass die verbogene Fläche hier eine abwickelbare Fläche wird. Vergl. die Einleitung des p. 8 Fussnote citierten Aufsatzes von Weingarten.

Durch die Gleichungen 22) p. 36 ist die für reelles k und k_1 reelle Fläche, bezogen auf ein imaginäres Koordinatensystem, dargestellt. Zur Untersuchung transformieren wir auf reelle Koordinatenlinien und zwar auf die Haupttangentenkurven. Nach 21) p. 36 und 11) p. 29 werden die Gleichungen der Haupttangentenkurven in den u und v:

$$u\,v = \text{const} \quad \text{und} \quad \frac{u}{v} = \text{const},$$

so dass durch die Substitution

$$1) \qquad \frac{u+v}{1+u\,v} = \varrho \cos t, \quad i\,\frac{v-u}{1+u\,v} = \varrho \sin t$$

oder

$$1') \qquad u = \frac{1+\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho}\, e^{ti}, \qquad v = \frac{1+\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho}\, e^{-ti}$$

die betreffende Transformation ausgeführt wird. Die Komponenten der Verschiebungsrichtungen werden dann:

$$2) \qquad \varphi_1 = \varrho \cos t, \qquad \varphi_2 = \varrho \sin t, \qquad \varphi_3 = \sqrt{1-\varrho^2}$$

und die Gleichungen 22) p. 36:

$$x_1 = 2\,\varrho \left(k \ln \frac{1+\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho} + k_1 \right) \sin t = r \sin t,$$

$$3) \qquad x_3 = -2\,\varrho \left(k \ln \frac{1+\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho} + k_1 \right) \cos t = -r \cos t,$$

$$x_3 = 2\,k\,t.$$

Wie wir auch k_1 ändern, immer bleiben wir auf derselben Fläche, nur entsprechen demselben Punkte der Fläche andere ϱ und damit andere Verschiebungsrichtungen, die aber alle in der Ebene liegen, welche senkrecht zu der bezüglichen Geraden der Schraubenfläche durch den Punkt gelegt ist. Auf diese Weise leuchtet ein, dass die Schraubenfläche auf einfach unendlich viele Arten äquidistant verbogen werden kann.

Machen wir in den zugehörigen, für die Verbiegung wichtigen Kurvensystemen ψ und $\Delta_1 \psi$ auch die Substitution 1), so folgt:

$$4) \quad \psi = 2\left\{ k \left[1 - \sqrt{1-\varrho^2} \ln \frac{1+\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho} \right] - k_1 \sqrt{1-\varrho^2} \right\} - \text{const}$$

und

5)
$$V\Delta_1\psi = \frac{k\left[\frac{V1-\varrho^2}{\varrho} + \varrho \ln \frac{1+V1-\varrho^2}{\varrho}\right] - k_1\varrho}{k\left[1 - V1-\varrho^2 \ln \frac{1+V1-\varrho^2}{\varrho}\right] - k_1 V1-\varrho^2} = \operatorname{cotg} w.$$

Hieraus ersehen wir, dass die beiden Systeme zusammenfallen und zwar mit den Schraubenlinien der Fläche identisch sind, also ein geodätisches Parallelsystem bilden, wie es nach p. 42 sein muss.

Die Verbiegung geht also so vor sich, dass die Verschiebungsrichtung eines Punktes in der Ebene liegt, die bestimmt ist durch die betreffende Normale der Fläche und die Tangente der Schraubenlinie, die durch denselben geht. Für ein und dieselbe Schraubenlinie bleibt weiter nach 5) der Winkel zwischen der Verschiebungsrichtung und der Tangente konstant, so dass also bei der Biegung alle Geraden der Schraubenfläche in kongruente Kurven verbogen werden. Wir brauchen also nur die Verbiegung einer Geraden der Schraubenfläche zu betrachten und erlangen damit ein Bild von der Biegung der Fläche überhaupt. Die Verbiegung einer Geraden der Schraubenfläche aber ergibt sich, bei Beachtung der Gleichungen 2), wenn wir vermittelst der Gleichung

$$r = 2\varrho\left(k \ln \frac{1+V1-\varrho^2}{\varrho} + k_1\right)$$

die Zuordnung der Punkte der Geraden zu den Werten von ϱ untersuchen. Wir zerlegen die Gleichung in zwei, indem wir setzen:

6)
$$r = k r_1 + r_2 ,$$

wo

7)
$$r_1 = 2\varrho \ln \frac{1+V1-\varrho^2}{\varrho}$$

und

8)
$$r_2 = 2 k_1 \varrho .$$

Soll sich reelles r_1 ergeben, so darf sich ϱ blos zwischen 0 und 1 bewegen. Eine leichte Grenzbetrachtung lehrt, dass $r_1 = 0$ wird für $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$. Für keinen reellen Wert von ϱ, für den sich ein reelles r ergibt, wird r unendlich. Berücksichtigen wir auch das negative Zeichen der Wurzel, so ist, da

$$\ln \frac{1-V1-\varrho^2}{\varrho} = -\ln \frac{1+V1-\varrho^2}{\varrho} ,$$

die durch 7) in Bezug auf ein rechtwinkeliges Achsensystem ϱ, r_1 dargestellte Kurve symmetrisch zur ϱ Achse. Aus

$$\frac{d\,r_1}{d\,\varrho} = 2\left[\ln\frac{1+\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho} - \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}\right]$$

und

$$\frac{d^2\,r_1}{d\,\varrho^2} = -\frac{2}{\varrho\,\sqrt{(1-\varrho^2)^3}}$$

folgt, dass die Kurve keinen Wendepunkt besitzt, dass sie oberhalb der ϱ Achse konkav gegen die negative r_1 Achse und unterhalb konkav gegen die positive r_1 Achse ist und dass die Tangenten in den Punkten $\varrho = 0$ und $\varrho = 1$ parallel der r_1 Achse sind. Die Gleichung $\frac{d\,r_1}{d\,\varrho} = 0$ hat eine reelle Wurzel ϱ^0, für welche sich aus 7) das Maximum von r_1 zu r_1^0 und das Minimum zu $-r_1^0$ ergibt. Um ϱ^0 wirklich zu berechnen, schreiben wir die Gleichung $\frac{d\,r_1}{d\,\varrho} = 0$ in der Form:

$$\ln\left(\operatorname{cotg}\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{1}{\cos\Theta}\,,$$

wo $\varrho = \sin\Theta$. Diese Gleichung ist erfüllt für

$$\Theta^0 = 33^0\,32'\,s''\,,$$

wo s zwischen 3 und 5 liegt.

Hieraus folgt:

$$\varrho^0 = \sin\Theta^0 = 0{,}5524$$

und

$$r_1^0 = 1{,}325\,.$$

Die Gleichung 8) stellt einfach eine Gerade vor.

Wir erkennen nun leicht nach 6) die Zuordnung von r zu ϱ. Für $\varrho = 0$ wird $r = 0$. Lassen wir ϱ bei positivem Zeichen der Wurzel bis $\varrho = 1$ wachsen, so nimmt r anfangs bis zu einem Maximum zu und nimmt dann wieder ab. Lassen wir von $\varrho = 1$ ab ϱ bei negativem Zeichen der Wurzel wieder abnehmen, so nimmt r weiter ab, wird Null, erreicht ein Minimum für negatives r und nimmt dann schliesslich wieder bis Null zu. Das Minimum von r wird für jedes endliche k_1 negativ, da die Kurve 7) immer steiler abfällt, als die Gerade 8) ansteigt (weil ja die Tangente an die Kurve 7) im Punkte $\varrho = 0$ parallel zur r_1 Achse ist).

Ebenso ist das Maximum stets positiv. Wir sehen weiter, dass bei festem k_1 zu jedem r zwei reelle ϱ gehören, so dass also jede der unendlich vielen möglichen Verbiegungen noch auf zwei mal zwei [1]) Arten bewerkstelligt werden kann.

Die beiden Extrema von r ergeben sich vermittelst der Gleichung

$$\frac{dr}{d\varrho} = 2\left\{k\left[\frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}} - \ln\frac{1+\sqrt{1-\varrho^2}}{\varrho}\right] - k_1\right\} = 0,$$

welche mit $\psi = 0$ identisch ist. Diese Gleichung hat zwei reelle Wurzeln ϱ^{I} und ϱ^{II}, von denen die eine für positives, die andere für negatives Vorzeichen der Quadratwurzel sich ergibt. Für ϱ^{I} liefert die Gleichung 6), da blos das positive Zeichen der Quadratwurzel verwendet werden darf, einen Wert r^{I} und ebenso für ϱ^{II} einen Wert r^{II}. Die den beiden Werten r^{I} und r^{II} entsprechenden Schraubenlinien sind die wahren Ränder des äquidistant verbiegbaren Stücks der Schraubenfläche.

Für $k_1 = 0$ sind die beiden Ränder der reellen Fläche gleichweit von der Achse der Schraubenfläche entfernt. Für positives k_1 rückt der Rand, der sich für positives Vorzeichen der Quadratwurzel, also für positives r ergibt, weiter von der Achse fort und der andere näher an die Achse heran Umgekehrt ist es für negatives k_1.

Wir denken uns jetzt, um den allgemeinen Fall der Verbiegung zu behandeln, k_1 einen beliebigen festen Wert beigelegt, dann werden die Lagen der Geraden, in welcher die beiden Verschiebungsrichtungen des betreffenden Flächenpunktes für das eine Paar von Verschiebungen liegen, aus den bezüglichen Formeln erhalten, wenn wir ϱ von ϱ^{I} bis Null abnehmen und dann, indem wir der Wurzel das negative Zeichen erteilen, bis ϱ^{II} wieder zunehmen lassen. Wie schon bemerkt, liegen die betreffenden Geraden in der Ebene, die durch den Punkt senkrecht zu der Erzeugenden gelegt ist. Der Winkel w der Geraden mit der Tangente an die durch den bezüglichen Punkt gehende Schraubenlinie ist hier ausser an den wahren Rändern noch für $\varrho = 0$ $r = 0$, also für die Punkte der Achse Null, welche daher in sich verschoben wird, obwohl die Achse nicht in der Gleichung $\psi = 0$ enthalten ist [2]). Die Lage der übrigen Geraden ersehen wir am

[1]) p. 13 Fussnote.

[2]) Es liegt für die Achse insofern ein Ausnahmefall vor, als die ganze

einfachsten aus der dritten Gleichung 2), welche uns den Winkel der Verschiebung mit der Achse der Schraubenfläche gibt. Dieser Winkel nimmt für abnehmendes ϱ immer mehr ab, wird Null für $\varrho = 0$, nimmt dann wieder zu und fällt für ϱ^{II} wieder mit der Tangente des Randes zusammen. Indem wir uns die Punkte in der einen oder andern Richtung der so bestimmten Geraden verschoben denken, erhalten wir die beiden Verbiegungen.

Das andere Paar von Verbiegungen des zwischen r^I und r^{II} gelegenen Stücks der Schraubenfläche erhalten wir. wenn wir ϱ von ϱ^I an bis 1 zunehmen und dann bei negativem Zeichen der Quadratwurzel bis ϱ^{II} wieder abnehmen lassen. Hier wird der Winkel w nur für die beiden Ränder Null. Aus der dritten Gleichung 2) folgt, dass der Winkel der Geraden, in der die beiden Verschiebungsrichtungen liegen, mit der Achse für zunehmendes ϱ immer mehr zunimmt, für $\varrho = 1$ gleich 90^0 wird, dann bei abnehmendem ϱ wieder abnimmt, bis er für ϱ^{II} wieder mit dem der Tangente an die Randkurve zusammenfällt.

Hieraus erkennen wir nun, wie die Verbiegung einer Geraden der Schraubenfläche und damit, wie die Verbiegung der ganzen Schraubenfläche vor sich geht.

Ausser den betrachteten äquidistanten Verbiegungen der Schraubenfläche sind keine anderen mehr möglich, da sich nach p. 36 nur für die dort angegebenen Werte der Funktionen f und g eine Schraubenfläche ergeben kann[1]).

§ 3. Eine algebraische Fläche.

Als weiteres Beispiel wollen wir noch eine algebraische Fläche untersuchen. Wir setzen f''' und g''' gleich einer Konstanten, etwa gleich 3[2]). Die zugehörige Minimalfläche wird dann die Enneper'sche Fläche, deren Gleichungen sich zu

---

Achse sich für $u = v = \infty$ ergibt, obwohl wir doch im allgemeinen hiefür nur einzelne Punkte unserer Flächen bekommen, die in der Richtung der x_3-Achse verschoben werden; denn es ist: $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 1$ für $u = v = \infty$.

1) Vergl. p. 43 und 44.

2) Stahl, Grundformeln p. 71.

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(3\,u - u^3) + \frac{1}{2}(3\,v - v^3)$$

1) $$\xi_2 = \frac{i}{2}(3\,u + u^3) - \frac{i}{2}(3\,v + v^3)$$

$$\xi_3 = \frac{3}{2}u^2 + \frac{3}{2}v^2$$

ergeben. Setzen wir die Integrationskonstanten Null, so erhalten wir

2) $$f' = \frac{3}{2}u^2\,, \qquad g' = \frac{3}{2}v^2$$
$$f = \frac{u^3}{2}\,, \qquad g = \frac{v^3}{2}$$

und die einfachste, der Enneper'schen Fläche zugeordnete äquidistant verbiegbare Fläche wird[1]):

3) $$x_1 = \frac{(u+v)^3}{2(1+uv)}$$
$$x_2 = \frac{i(v-u)^3}{2(1+uv)}$$
$$x_3 = \frac{(uv-3)(u^2+v^2)}{2(1+uv)}\,.$$

Wählen wir auf der Fläche ein reelles Koordinatensystem ϱ, t, das mit dem alten durch die Gleichungen verbunden ist

4) $$u + v = \varrho\cos t\,, \qquad i(v-u) = \varrho\sin t$$

oder

$$u = \frac{\varrho}{2}\cdot e^{ti}\,, \qquad v = \frac{\varrho}{2}\cdot e^{-ti}\,,$$

so folgen die Gleichungen der Fläche zu:

3') $$x_1 = \frac{2\varrho^3\cos^3 t}{4+\varrho^2}$$
$$x_2 = \frac{2\varrho^3\sin^3 t}{4+\varrho^2}$$
$$x_3 = \frac{(\varrho^2-12)\varrho^2\cos 2t}{4(4+\varrho^2)}\,.$$

[1]) Auf eine Fläche, die diese als speziellen Fall enthält, hat schon Ribaucour a. a. O. p. 235 seiner Abhandlung hingewiesen.

Die Koordinatenlinien $t = \text{const}$ sind eben und zwar sind dieselben die Schnittkurven eines durch die x_3 Achse gelegten Ebenenbüschels. Die Linien $\varrho = \text{const}$ projizieren sich in die $x_1\ x_2$ Ebene als Astroiden. Auf den über diesen Astroiden errichteten Cylinderflächen haben wir uns nach der 3ten Gleichung die Koordinatenkurven als sinusartige Kurven aufgezeichnet zu denken, die durch die Rückkehrpunkte der Astroiden gehen.

Um noch eine genauere Vorstellung von der Fläche zu erhalten, betrachten wir die Schnitte derselben mit den Koordinatenebenen. Von der $x_1\ x_2$ Ebene wird die Fläche in den beiden die Achselwinkel halbierenden Geraden und in einer Astroide geschnitten. Erstere ergeben sich für $t = \frac{\pi}{4}$, und $t = \frac{3\,\pi}{4}$, letztere für $\varrho = \sqrt{12}$. Die $x_1\ x_2$ und die $x_2\ x_3$ Ebene schneiden die Fläche in kongruenten Kurven, welche aus einander durch Vertauschen der x_1 mit der x_2 Achse und der $+\ x_3$ Achse mit der $-\ x_3$ Achse erhalten werden. Die Gleichungen der einen folgen für $t = 0$ und die der andern für $t = \frac{\pi}{2}$. Die Kurven haben einen Rückkehrpunkt im Anfang, keinen Wendepunkt und sind symmetrisch zur x_3 Achse. Die erstere ist konkav nach der positiven x_3 Achse. Gehen wir vom Anfangspunkte aus auf der Kurve fort, so nimmt die x_3 Ordinate bis zu einem Minimum ab, um dann wieder zuzunehmen und schliesslich positiv unendlich zu werden.

Es wird hier

$$5) \qquad \psi = -\frac{\varrho^2\,(12 + \varrho^2)\,\sin 2\,t}{4\,(4 + \varrho^2)} = \text{const},$$

während der Ausdruck für $\text{cotg}^2\ w$ so kompliziert wird, dass daraus nicht viel für die Verbiegung ersehen werden kann.

Aus dem Ausdruck für ψ erkennen wir, dass die Koordinatenkurven $t = 0$ und $t = \frac{\pi}{2}$, d. h. die Schnitte der Fläche mit der $x_1\ x_3$ resp. $x_2\ x_3$ Ebene in sich verschoben werden. Diese Kurven sind jedoch nur scheinbare Randkurven, so dass wir hier einen Fall haben, wo die Fläche in ihrer ganzen reellen Ausdehnung äquidistant verbogen werden kann.

Die Lage der übrigen Verschiebungsrichtungen lässt sich dadurch klarer erkennen, dass wir die Richtungscosinus der Verschiebung

$$\varphi_1 = \frac{4\varrho \cos t}{4+\varrho^2}, \qquad \varphi_2 = \frac{4\varrho \sin t}{4+\varrho^2}, \qquad \varphi_3 = \frac{\varrho^2 - 4}{4+\varrho^2}$$

betrachten. Hieraus folgt, dass die Verschiebungsrichtungen in der Ebene der Koordinatenlinien $t = \text{const}$ liegen und dass sie für die Punkte der Kurven $\varrho = \text{const}$ einen konstanten Winkel mit der x_3 Achse bilden. Die Grösse dieses Winkels erkennen wir geometrisch leicht daraus, dass die Tangente an die Kurven 5) in dem Punkte, der dem betreffenden ϱ entspricht, mit der Verschiebungsrichtung zusammenfällt.

Die beiden[1]) Verbiegungen finden statt, indem die Punkte der Fläche sich in der einen oder anderen Richtung der soeben ihrer Lage nach bestimmten geraden Linien verschieben.

---

[1]) p. 13.

Vita.

Ich — Alwin Mehling — wurde geboren am 6. März 1873 zu Kleinbrach, kgl. Bezirksamts Kissingen, als Sohn des Lehrers Dominikus Mehling und dessen Ehefrau Dorothea, geb. Röser.

Nachdem ich in meiner jetzigen Heimat Zell a/Main die Volksschule besucht hatte, wurde ich in die Lateinschule in Würzburg aufgenommen, aus der ich im Jahre 1888 an das kgl. Realgymnasium übertrat. Nach Absolvierung des letzteren liess ich mich im Wintersemester 1894 an der Universität Würzburg als stud. math. immatrikulieren. Acht Semester, von denen ich sieben an der Universität Würzburg und eines an der Universität München verbrachte, widmete ich hauptsächlich dem Studium der Mathematik, Physik und Astronomie. Während meiner Studienzeit hörte ich die Vorlesungen folgender Herrn Professoren und Dozenten: Ernst Anding, Walter Dyck, Robert Geigel, Lorenz Grasberger, Arthur Hantsch, Robert Haussner, Ferdinand Lindemann, Friedrich Prym, Wilhelm Röntgen, Aurel Voss, Franz Wegele und Max Wien.

Der mündlichen Doktorprüfung unterzog ich mich am 2. Juli 1898.